Examenul național de bacalaureat 2025 – simulare județeană
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\lg(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)-1=3\lg2+2\lg3$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+2x-3$, unde m este un număr real și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+3$. Dacă M este punctul în care graficul funcției g intersectează axa Ox, atunci determinați numărul real m astfel încât punctul M să aparțină și graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 3.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, $\alpha\in(0,+\infty)$, punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}=\alpha\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CA}=\alpha\overrightarrow{CP}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{3}=0$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}m+1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & m+1\\ 1 & m+1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(m+1)x-2y+z=m\\ -2x+y+(m+1)z=3m+3,\\ x+(m+1)y-2z=2m-3\end{cases}$ unde m este un număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $A(m)$ este inversabilă dacă și numai dacă $m\neq0$.

5p **c)** Pentru $m\neq0$, demonstrați că singura soluție a sistemul de ecuații este $x=1$, $y=2$ și $z=3$.

2. Pe mulțimea $M=[-1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+x+y$, pentru orice $x, y\in M$.

5p **a)** Verificați dacă $x*y=(x+1)(y+1)-1$, pentru orice $x, y\in M$.

5p **b)** Dacă $x\in M$ și $x\neq-1$, atunci demonstrați că există $x'\in M$ și $x\neq-1$, astfel încât $x*x'=0$.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$.

5p **a) a)** Verificați dacă $f'(x)=\ln\frac{1-x}{x}$, oricare ar fi $x\in(0,1)$.

5p **b) b)** Arătați că $\lim\limits_{x\searrow0}f(x)=0$.

5p **c)** Dacă $a,b\in(0,1)$ și $a+b=1$, atunci demonstrați că $a\ln a+b\ln b\geq\ln\frac{1}{2}$.

2. Pentru orice număr natural nenul n, se consideră funcția $f_n:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\sqrt{x+1}$, iar șirul $(I_n)_{n\geq1}$, este definit prin $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\frac{f_2(x)}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $I_1=\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+3)I_n+2nI_{n-1}=4\sqrt{2}$, pentru orice număr natural nenul n.

Simulare județeană

Proba E. c) - Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\lg(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)-1=\lg(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)-\lg10=\lg\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{10}=$	**2p**
	$=\lg\frac{2^4\cdot3^2\cdot5}{2\cdot5}=\lg2^3\cdot3^2=3\lg2+2\lg3.$	**3p**
2.	Abscisa punctului M este soluția ecuației $g(x)=0\Leftrightarrow x=-3$	**2p**
	Punctul $M(-3,0)$ aparține graficului funcției $f\Leftrightarrow f(-3)=0\Leftrightarrow 9m-9=0\Leftrightarrow m=1.$	**3p**
3.	$\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{x-3}+1\Leftrightarrow x=x-3+2\sqrt{x-3}+1\Leftrightarrow$	**2p**
	$\sqrt{x-3}=1\Leftrightarrow x=4,$ care convine.	**3p**
4.	Numărul cazurilor posibile este 900. Pentru că $3=3+0+0=2+1+0=1+1+1$, cazurile favorabile sunt 300, 210, 201, 120, 102, 111 deci sunt 6 de cazuri favorabile. $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{900}=\frac{1}{150}$	**2p** **3p**
5.	$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=$	**2p**
	$=\frac{\alpha+1}{\alpha}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\alpha+1}{\alpha}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}.$	**3p**
6.	$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6};\ \cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$	**3p**
	$\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-2&1&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=-2-2-2-1-1+8=0$	**2p**
	b) $\det(A(m))=\begin{vmatrix}m+1&-2&1\\-2&1&m+1\\1&m+1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m&m&m\\-2&1&m+1\\1&m+1&-2\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&1&m+1\\1&m+1&-2\end{vmatrix}=$ $=m\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&3&m+3\\1&m&-3\end{vmatrix}=-m\left(m^2+3m+9\right)$	**3p**
	$\exists A^{-1}(m)\Leftrightarrow\det(A(m))\neq0\Leftrightarrow m\neq0$	**2p**
	c) Pentru $x=1,\ y=2$ și $z=3$ sistemul este echivalent cu $\begin{cases}m+1-4+3=m\\-2+2+3m+3=3m+3,\\1+2m+2-6=2m-3\end{cases}$	**2p**
	egalitățile sunt adevărate, deci $x=1,\ y=2$ și $z=3$ este o soluție a sistemului. $m\neq0\Rightarrow\det(A(m))\neq0$ și rezultă, conform teoremei lui Cramer că singura soluție a sistemul de ecuații este $x=1,\ y=2$ și $z=3$.	**3p**
2.	**a)** $(x+1)(y+1)-1=xy+x+y+1-1=$	**3p**
	$=x*y$ pentru orice $x,\ y\in M.$	**2p**

	b) $x\in M$ şi $x\neq -1$ astfel încât $x*x'=0\Leftrightarrow (x+1)(x'+1)-1=0\Leftrightarrow x'=\dfrac{1}{x+1}-1$	**2p**
	$x\in M$ şi $x\neq -1\Rightarrow x+1>0$, rezultă că există $x'\in M$ şi $x'\neq -1$, astfel încât $x*x'=0$.	**3p**
	c) $x*x*x*x=x\Leftrightarrow (x+1)^4-1=x\Leftrightarrow$	**2p**
	$x(x+1)\left(x^2+3x+3\right)=0\Leftrightarrow x=-1\in M$ sau $x=0\in M$ sau $x=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\notin M$ sau $x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\notin M$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $f'(x)=(-x)'\ln x-x(\ln x)'-(1-x)'\ln(1-x)-(1-x)(\ln(1-x))'=$	**3p**
	$=-\ln x+\ln(1-x)=\ln\dfrac{1-x}{x}$	**2p**
	b) $\lim\limits_{x\searrow 0}x\ln x=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\searrow 0}(-x)=0\Rightarrow$	**3p**
	$\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}(-x\ln x-(1-x)\ln(1-x))=0.$	**2p**
	c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\searrow 0}f'(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\nearrow 1}f'(x)=+\infty$ În consecinţă rezultă că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $\left[\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, rezultă că $f(a)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right),\ \forall a\in(0,1)\Rightarrow$ x: 0	$\frac{1}{2}$	1 $f'(x)$: $+\infty$ +++++++++ 0 −−−−−−− $-\infty$ f: ↗↗↗↗ $\ln 2$ ↘↘↘↘	**3p**
2.	**a)** $\int_0^1\dfrac{f_2(x)}{\sqrt{x+1}}dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{3}.$	**3p**
	b) $I_1=\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx=\int_0^1\left[(x+1)-1\right]\sqrt{x+1}(x+1)'dx=\int_1^2(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}})dx=$	**3p**
	$=\left(\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big\vert_1^2=\dfrac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}.$	**2p**
	c) $I_n=\dfrac{2}{3}\int_0^1 x^n\left((x+1)^{\frac{3}{2}}\right)'dx=\dfrac{2}{3}\left[x^n\left(\sqrt{x+1}\right)^3\Big\vert_0^1-n\int_0^1 x^{n-1}(x+1)\sqrt{x+1}dx\right]=$	**2p**
	$=\dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-nI_n-nI_{n-1}\right)\Rightarrow\ (2n+3)I_n+2nI_{n-1}=4\sqrt{2}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	**3p**