INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Examenul național de bacalaureat 2026
Simulare
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Numerele reale $2, a, 5, b$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Să se calculeze $b - a$.

5p 2. Fie numerele complexe $z_1 = a + i$ și $z_2 = 1 + (a+1)i$, unde a este număr real iar $i^2 = -1$. Să se demonstreze că numărul $z_1 \cdot z_2$ **nu** este real pentru nicio valoare a numărului real a.

5p **3.** Determinați valorile reale ale lui x dacă $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+1} - \frac{9}{4} > 0$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre au suma cifrelor număr impar.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 2$, $AC = 4$ și $A = \frac{\pi}{3}$. Să se calculeze lungimea vectorului $\overline{AB} + \overline{AC}$.

5p **6.** Să se determine $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ dacă $sinx \cdot cosx = \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay - 2z = 1 \\ x + y - z = a \end{cases}$$, unde a este un număr real.

5p **a)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea A este inversabilă.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care ecuația $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ **nu** are soluții reale,

unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5p **c)** Pentru $a = 1$, fie (x_0, y_0, z_0) o soluție reală a sistemului. Să se determine valoarea maximă a expresiei $x_0 \cdot y_0$.

2. Pe mulțimea $M = [1, \infty)$ se definește legea de compoziție asociativă

$x \circ y = 1 + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $4 \circ 5 = 6$.

5p **b)** Să se arate că $x = 1$ este singurul element simetrizabil în raport cu legea "$\circ$".

5p **c)** Dați exemplu de două numere naturale nenule a, b pentru care $a \circ b = 1 + \sqrt{2026}$.

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2-x-1)\cdot e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=(3x-x^2)\cdot e^{-x}, x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Să se scrie ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați numerele $x\in[0,+\infty)$ pentru care $f(x)$ este număr întreg.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 x\cdot f(x)dx=\frac{5}{6}$.
5p	**b)** Determinați numărul real $a>2$ cu proprietatea că $\int_2^a \frac{f(x)-1}{x^2-1}dx=\ln\left(\sqrt{5}\right)$.
5p	**c)** Să se demonstreze că $1\leq\int_0^1 \sqrt{x}\cdot e^{f(x)-1}dx\leq e-1$.

Examenul național de bacalaureat 2026

Simulare

Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă diferă de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.

Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

1.	Avem $a=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}$ $\frac{a+b}{2}=5$ conduce la $b=\frac{13}{2}$, de unde $b-a=3$	**2p** **3p**
2.	$z_1\cdot z_2=a+(a^2+a)i+i-(a+1)=-1+(a^2+a+1)i$ Cum $a^2+a+1\neq 0$ pentru orice număr real a, rezultă cerința	**3p** **2p**
3.	Obținem $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+1}>\frac{9}{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ Așadar $3x+1<-2$ de unde $x\in(-\infty,-1)$	**2p** **3p**
4.	Dacă $\overline{ab}$ este un număr natural de două cifre atunci sunt posibile cazurile: 1. a este pară și b este impară, situație în care se găsesc $4\cdot 5=20$ de numere 2. a este impară și b este pară, situație în care se găsesc $5\cdot 5=25$ de numere Obținem astfel 45 de numere în total	**2p** **3p**
5.	$\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AD}$, unde patrulaterul $ABDC$ este paralelogram Din $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot cos(ABD)=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot cos\frac{2\pi}{3}$ $=20-16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=28$, obținem că $AD=2\sqrt{7}$	**2p** **3p**
6.	Avem $sin2x=\frac{1}{2}$ Cum $2x\in(0,\pi)$ rezultă că $2x=\frac{\pi}{6}$ sau $2x=\frac{5\pi}{6}$ deci $x\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right\}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL II

1a)	Avem $det(A)=-a^2+a$ $det(A)\neq 0$ conduce la $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$	**3p** **2p**
b)	Ecuația este echivalentă cu sistemul. Dacă $det(A)\neq 0$ atunci sistemul are soluție unică, fals, deci $det(A)=0$ de unde $a\in\{0,1\}$ Pentru $a=1$ se obține $rang(A)=rang(\bar{A})=2$, deci sistemul este compatibil nedeterminat, fals. Pentru $a=0$ rezultă $rang(A)=2, rang(\bar{A})=3$ deci sistemul este incompatibil. Așadar $a=0$	**2p** **3p**
c)	Rezolvând sistemul obținem $x_0=\alpha, y_0=1-\alpha, z_0=0, \alpha\in\mathbb{R}$	**2p**

	Atunci $x_0 \cdot y_0 = -\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ care are maximul egal cu $\frac{1}{4}$ atins pentru $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$	**3p**
2.a)	Avem $4 \circ 5 = 1 + \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2}$ $= 1 + \sqrt{25} = 1 + 5 = 6$	**3p** **2p**
b)	Din $x \circ e = x$ pentru orice $x \in M$, se obține că $e = 1$, care verifică și relația $e \circ x = x$, $x \in M$ deci elementul neutru al legii este $e = 1$ Fie $x \in M$ și $x' \in M$ simetricul lui x. Se obține $(x-1)^2 + (x'-1)^2 = 0$ de unde rezultă că $x = x' = 1$	**3p** **2p**
c)	Avem $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 2026$ Cum $2026 = 1^2 + 45^2$ putem alege $a = 2$ și $b = 46$	**2p** **3p**

SUBIECTUL III

1.a)	Avem $f'(x) = (x^2-x-1)' \cdot e^{-x} + (x^2-x-1) \cdot (e^{-x})'$ $= (2x-1) \cdot e^{-x} - (x^2-x-1) \cdot e^{-x}$ deci $f'(x) = (3x-x^2) \cdot e^{-x}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0,$ deci $y = 0$ este asimptotă orizontală către ∞	**3p** **2p**
c)	Avem $f'(x) > 0, x \in (0,3), f'(x) < 0, x \in (3,+\infty), f'(0) = f'(3) = 0,$ deci f este strict crescătoare pe $[0,3]$ și strict descrescătoare pe $[3,+\infty)$ Cum $f(3) = \frac{5}{e^3} < 1$ iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ rezultă că $f(x)$ nu este număr întreg pentru $x \geq 3$ Dacă $x \in [0,3]$ atunci $f(x) = -1$ pentru $x = 0$ și $f(x) = 0$ dacă $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 x \cdot f(x)dx = \int_0^1 (x^2+x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$ $= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$	**3p** **2p**
b)	$\int_2^a \frac{f(x)-1}{x^2-1}dx = \int_2^a \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_2^a \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}ln\lvert x^2-1\rvert\Big|_2^a$ Deci $\frac{1}{2}ln(a^2-1) - \frac{1}{2}ln3 = ln\left(\sqrt{5}\right)$ de unde $ln(a^2-1) = ln15$ cu soluția convenabilă $a = 4$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{f(x)-1}dx = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^x dx \leq \int_0^1 e^x\,dx = e-1$ $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^x dx \geq \int_0^1 x \cdot e^x dx = (x-1) \cdot e^x\Big|_0^1 = 1$	**2p** **3p**