EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT

MATEMATICĂ M_*MATE-INFO*

Testare de etapă

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Să se determine numărul natural m pentru care numărul complex $z = \frac{m-3i}{3-mi}$ este real.
2. Să se găsească o relaţie independentă de parametru real m între rădăcinile ecuaţiei:
   $x^2 - (m+2)x + 3m = 0$, m∈R.
3. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3x+1} + \sqrt{17-x} = 8$.
4. Se consideră mulţimile M ={1,2,3,4) şi N ={1,2,3,4,5,6,7}. Să se determine numărul funcțiilor descrescătoare $f: M \to N$ cu proprietatea că $f(4) = 2$.
5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele A(2,−1), B(-1,1) şi C(1,3). Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi este paralelă cu mediatoarea segmentului BC.
6. Ştiind că x∈ $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ şi că sin x= - $\frac{2}{3}$, să se calculeze sin 2x.

Subiectul II **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 5x + y + mz = n \end{cases}$, $m, n \in \mathbb{R}$.
   a) Să se determine parametrul real m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.
   b) Să se determine valorile reale ale lui m și n pentru care sistemul este incompatibil.
   c) Să se arate că există o infinitate de valori ale lui m și n pentru care sistemul admite o soluție (x, y, z) cu x, y, z în progresie aritmetică.
2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \star y = xy - 3x - 3y + 12$.
   a) Să se arate că legea $\star$ se mai scrie și $x \star y = (x-3)(y-3) + 3$.
   b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ (x+1) = 3$.
   c) Să se rezolve inecuația $xo2x \leq 0$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$.
   a) Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}$.
   b) Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 2$ și asimptota oblică la $+\infty$.
   c) Arătați că pentru orice $x \in [2,4]$ are loc inegalitatea $2\sqrt{2} \leq f(x) \leq \frac{11}{3}$.

2. Fie $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, x \in (-\infty, -1) \\ 2 + x, x \in [-1, \infty) \end{cases}$.

   a) Să se arate că f sa admită primitive pe $\mathbb{R}$.

   b) Să se determine o primitivă F a funcției cu proprietatea că F(2)= $\frac{3}{2}$.

   c) Determinați o primitivă $G: R \to R$ a funcției $g: [-1, \infty) \to R$, $g(x) = \frac{1}{2x^2+x+4-f(x)}$, pentru care $G(0) = 0$, unde f(x)= $2 + x, x \in [-1, \infty)$

EXAMENUL DE BACALAUREAT
MATEMATICĂ M_MATE-INFO,
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Testare de etapă

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=\frac{m-3i}{3-mi}=\frac{(m-3i)(3+mi)}{(3-mi)(3+mi)}=\frac{6m+(m^2-9)i}{m^2+9}$. $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2-9=0\Rightarrow$ $\Rightarrow m=\pm 3$. Cum $m\in\mathbb{N}\Rightarrow m=3$.	**2p** **1p** **2p**
2.	$x_1+x_2=m+2$ $x_1\cdot x_2=3m$ $x_1\cdot x_2$-3x_1-3x_2+6=0	**2p** **2p** **1p**
3.	$17-x\geq 0$ $3x+1\geq 0$ $x\in[-1/3,\infty)\cap(-\infty,17]$ Se obțin soluțiile x_1=8 și x_2=16 care aparțin domeniului.	**1p** **1p** **1p** **2p**
4.	Este necesar ca $f(1),f(2),f(3)\epsilon\{3,4,5,6,7\}$ cu $f(1)>f(2)>f(3)$. Deci, numărul căutat este egal cu numărul submulțimilor (considerate ordonate descrescător) de trei elemente ale mulțimii {3,4,5,6,7} Acesta este $C_5^3=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$.	**1p** **2p** **2p**
5.	$m_{AB}=-\frac{2}{3}$ Panta mediatoarei segmentului AB = $\frac{3}{2}$ Panta paralelei prin C = $\frac{3}{2}$ Ecuația paralelei prin C: 2y-3x-3=0.	**1p** **1p** **1p** **2p**
6.	cos x=$\frac{\sqrt{5}}{3}$ si cos x=$-\frac{\sqrt{5}}{3}$. Cum x$\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ rezultă cos x=$-\frac{\sqrt{5}}{3}$. sin 2x= 2 sinx cosx sin2x=$\frac{4\sqrt{5}}{9}$	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	matricea sistemului este: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & m \end{vmatrix} = m + 20 + 9 - 15 + 6m +$ $2 == 7m + 16$ $\det A = 0 \iff 7m + 16 - 0 \Longrightarrow m = -\frac{16}{7}$	**3p** **2p**
1.b)	Ca sistemul să fie incompatibil, este necesar ca determinantul matricei sistemului sa fie nul și rangul matricei sistemului să fie diferit de rangul matricei extinse. $\det A = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{16}{7}$. Cum $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang\ A = 2$ Obinem astfel ca rang $A = 3$. Asta inseamna ca: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & n \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow n - 10 - 3 + 5 + 6n - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 7n - 9 \neq 0 \iff n$ $\neq \frac{9}{7}$ Deci, solutia este $m = -\frac{16}{7}$ si $n \neq \frac{9}{7}$	**1p** **1p** **2p** **1p**
1.c)	$\div x, y, z \iff 2y = x + z$ Rezolvam sistemul $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{cases}$ si avem solutiile $x = \frac{1}{14}, y = -\frac{3}{14}, z = -\frac{1}{2}$ Inlocuind in a treia ecuație a sistemului avem: $\frac{5}{14} - \frac{3}{14} - \frac{m}{2} = n \Longrightarrow 7m + 14n = 2$ (care are o infinitate de solutii reale m si n)	**1p** **2p** **2p**
2.a)	1. $(x - 3)(y - 3) + 3 = xy - 3x - 3y + 9 + 3$ $= xy - 3x - 3y + 12.$	**3p** **2p**
2.b)	1. $x \circ (x + 1) = 3 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1 - 3) + 3 = 3$ $(x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 3\ sau\ x = 2$	**2p** **3p**
2.c)	1. $xo2x \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(2x - 3) + 3 \leq 0$ $2x^2 - 9x + 12 \leq 0$ At. ec. $2x^2 - 9x + 12 = 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$	**2p** **3p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2-2x+3)'(x-1)-(x^2-2x+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$. $= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1-2}{(x-1)^2}$. $= -1 - \frac{2}{(x-1)^2}$.	**2p** **2p** **1p**
1.b)	Prin calcul, obținem că asimptota oblică are ecuația $y = x - 1$ iar ecuația tangentei la grafic în punctul de abscisă $x = 2$ este $y = -x + 5$ Rezolvând sistemul format din cele două ecuații, se obține că $x = 3$ si $y = 2$. (coordonatele punctului de intersectie)	**2p** **2p** **1p**
1.c)	Rezolvând ecuația $f'(x) = 0$ și ținând cont că $x \in [2,4] \Rightarrow$ soluția $x = 1 + \sqrt{2}$ Se observă că $f'(x) < 0$ pe $[2,\ 1+\sqrt{2}]$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (1+\sqrt{2},\ 4]$ Valorile funcției f în $2, 1+\sqrt{2}$ și 4 sunt: $f(2) = 3$ $f(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ $f(4) = \frac{11}{3}$ $\Rightarrow f(x) \in \left[2\sqrt{2}, \frac{11}{3}\right], (\forall)\ x \in [2,4]$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	f continuă pe $\mathbb{R}$. f admite primitive pe $\mathbb{R}$.	**3p** **2p**
2.b)	F(x)= $2x+\frac{x^2}{2} + C$ F(2)= $\frac{3}{2}$. C= $\frac{-9}{2}$	**2p** **2p** **1p**
2.c)	$g(x) = g(x) = \frac{1}{2x^2+x+4-f(x)} = \frac{1}{2x^2+2} = \frac{1}{2(x^2+1)}$ O primitivă G a funcției g este de forma $G(x) = \frac{1}{2} \cdot arctgx + c$, unde $c \in R$ $G(0) = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2} \cdot arctgx$.	**2p** **2p** **1p**