Simularea Examenului Național de Bacalaureat 2026

Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.*

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=\dfrac{-13+11\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$, unde m este un număr real nenul. Determinați m pentru care vârful parabolei se află pe dreapta de ecuație $y=-x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot\log_{x+1}3=1+\log_3(x+1)$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A știind că aceasta are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,2)$ și este perpendiculară pe dreapta d, de ecuație $x-2y+3=0$.

5p **6.** Fie $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x=-\dfrac{4}{5}$. Calculați $\operatorname{ctg}2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & m\\ 1 & -m & 0\end{pmatrix}$, unde m este un număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A)=0$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m=2$, verificați egalitatea $A\cdot\left(A^2+6I_3\right)=O_3$.

5p **c)** Demonstrați că matricea $B=I_3+xA$ este inversabilă, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{10}-x-y+20$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=\dfrac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=\dfrac{101}{10}$.

5p **c)** Arătați că expresia $E(n)=\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{n}$ este constantă, pentru orice număr natural $n\geq 2026$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln\left(x^2+x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Arătați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x\mathrm{e}^x-2x+1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e f(x)dx=2\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-4\mathrm{e}+3$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2\mathrm{e}$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă G a funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}$, este funcție convexă.

Simularea Examenului național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=\dfrac{(-13+11\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2^2+5^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{29+87\mathrm{i}}{29}=1+3\mathrm{i}$, deci $\mathrm{Re}(z)=1$	**3p**
2.	$x_V=\dfrac{m}{2}$, $y_V=-\dfrac{m^2-8}{4}$	**2p**
	$y_V=-x_V+2\Leftrightarrow-\dfrac{m^2-8}{4}=-\dfrac{m}{2}+2\Leftrightarrow m^2-2m=0$, și cum $m\neq 0$, rezultă $m=2$	**3p**
3.	Cum $\log_{x+1}3=\dfrac{1}{\log_3(x+1)}$, pentru orice $x>0, x\neq 1$ (condițiile de existență), ecuația se rescrie $\dfrac{2}{t}=1+t$, unde $t=\log_3(x+1)$	**2p**
	Obținem $t_1=1, t_2=-2$, de unde $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{8}{9}$, care convin	**3p**
4.	Numărul de submulțimi ale lui A care au cel mult două elemente este egal cu $C_n^0+C_n^1+C_n^2$	**2p**
	Condiția din enunț se rescrie $1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}=16\Leftrightarrow n^2+n-30=0\Leftrightarrow n\in\{-6,5\}$, iar cum $n\geq 2$ (condiția de existență), rezultă $n=5$	**3p**
5.	Dacă h este dreapta căutată, din $d\perp h$ rezultă $m_d\cdot m_h=-1$, iar cum $m_d=\dfrac{1}{2}$ rezultă că $m_h=-2$	**2p**
	Ecuația dreptei h este $y-y_A=m_h\cdot(x-x_A)$, de unde obținem $h: 2x+y-4=0$	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=\dfrac{9}{25}$, iar cum $\sin x<0$, întrucât $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, rezultă $\sin x=-\dfrac{3}{5}$, de unde $\mathrm{tg}\,x=\dfrac{3}{4}$	**3p**
	$\mathrm{ctg}\,2x=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,2x}=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{2\,\mathrm{tg}\,x}=\dfrac{7}{24}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}0&1&-1\\-1&0&m\\1&-m&0\end{vmatrix}=0\cdot 0\cdot 0+1\cdot m\cdot 1+(-1)\cdot(-1)\cdot(-m)-0\cdot m\cdot(-m)-0\cdot 1\cdot(-1)-0\cdot(-1)\cdot(-m)=$	**3p**
	$=0+0+0-0-0-0=0$	**2p**
b)	$A^2=\begin{pmatrix}-2&2&2\\2&-5&1\\2&1&-5\end{pmatrix}\Rightarrow A^2+6I_3=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\left(A^2+6I_3\right)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&2\\1&-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2&2\\2&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$	**2p**

c)	$B = xI_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & x & -x \\ -x & 1 & mx \\ x & -mx & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(B) = m^2x^2 + 2x^2 + 1 \geq 1$, deci $\det(B) \neq 0$ pentru orice $m, x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că B este inversabilă	**2p**
2.a)	$x \circ y = \frac{xy}{10} - x - y + 20 = \frac{1}{10}(xy - 10x - 10y + 100) + 10 =$	**2p**
	$= \frac{1}{10}(x(y-10) - 10(y-10)) + 10 = \frac{1}{10}(x-10)(y-10) + 10$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$x \circ x = \frac{101}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{10}(x-10)^2 + 10 = \frac{101}{10}$	**3p**
	$\Leftrightarrow (x-10)^2 = 1$, de unde $x_1 = 9$, $x_2 = 11$	**2p**
c)	$E(n) = a \circ \sqrt{100} \circ b = a \circ 10 \circ b$, unde $a = \sqrt{1} \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ ... \circ \sqrt{9}$, $b = \sqrt{11} \circ \sqrt{12} \circ ... \circ \sqrt{n}$	**3p**
	$x \circ 10 = 10$, $10 \circ x = 10$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $E(n) = (a \circ 10) \circ b = 10 \circ b = 10 = constantă$, pentru orice $n \geq 2026$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2 + \frac{\left(x^2 + x + 1\right)'}{x^2 + x + 1} =$	**2p**
	$= 2 + \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x+1) - f(x)\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(2(x+1) - \ln\left(x^2 + 3x + 3\right) - 2x + \ln\left(x^2 + x + 1\right)\right) =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x \to \infty} \left(2 + \ln\left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 1}\right)\right) = 2 + \ln 1 = 2$	**2p**
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare, așadar este și injectivă	**3p**
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, f este continuă, deci transformă un interval într-un interval, de unde rezultă că $\text{Im } f = \mathbb{R}$, așadar f este și surjectivă, deci f, fiind injectivă și surjectivă, este bijectivă	**2p**
2.a)	$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(2e^x - 2 + \frac{1}{x}\right)dx =$	**2p**
	$= \left(2e^x - 2x + \ln x\right)\Big|_1^e = 2e^e - 4e + 3$	**3p**
b)	$F(x) = 2e^x - 2x + \ln x + k$, $k \in \mathbb{R}$	**3p**
	$F(1) = 2e \Leftrightarrow 2e - 2 + k = 2e \Leftrightarrow k = 2$, deci $F(x) = 2e^x - 2x + 2 + \ln x$	**2p**
c)	Dacă G este o primitivă a funcției $g(x) = f(x) - \frac{1}{x} = 2e^x - 2$, atunci	
	$G'(x) = g(x)$ și $G''(x) = 2e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$G''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția G este convexă	**2p**