Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3\left(2-\sqrt{20}\right)+\sqrt{180}=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(5x-1)=\lg 2+\lg 7$.

5p **4.** După o scumpire cu 30% un obiect costă 5200 de lei. Determinaţi preţul iniţial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(4,8)$ şi $C(4,0)$. Calculați distanța de la punctul B la dreapta AC.

5p **6.** Arătați că $\dfrac{2\cos 30^\circ}{2\operatorname{tg}45^\circ+1}=\operatorname{tg}30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 \\ a & 2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(10))=10$.

5p **b)** Demonstrați că $(A(a)-A(b))(A(a)-A(b))=3(a-b)(A(a)-A(b))$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(2))+\det(A(3))+\ldots+\det(A(n))=35$.

2. Pe mulțimea $M=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\sqrt{\left(x^2-2\right)\left(y^2-2\right)+2}$.

5p **a)** Arătați că $4*\sqrt{3}=4$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului $x=\sqrt{6}$, în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **c)** Calculați $\sqrt{2}*\sqrt{3}*\sqrt{4}*\ldots*\sqrt{2020}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}(\ln x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\dfrac{1}{e}$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt{e}f(x)+4\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x-1, x\in(-\infty,0] \\ \dfrac{3x-1}{x+1}, x\in(0,+\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{-1}^{0} e^{x} f(x)\,dx = \frac{5-3e}{e}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\left(2-\sqrt{20}\right)+\sqrt{180}=3\left(2-2\sqrt{5}\right)+6\sqrt{5}=$	**3p**
	$=6-6\sqrt{5}+6\sqrt{5}=6$	**2p**
2.	$f(1)=3\cdot 1-1=2$	**2p**
	$(f\circ f)(1)=f(2)=3\cdot 2-1=5$	**3p**
3.	$\lg(5x-1)=\lg 14\Rightarrow 5x-1=14$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	$x+\frac{30}{100}\cdot x=5200$, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=4000$ de lei	**2p**
5.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{d(A,BC)\cdot BC}{2}=\frac{4\cdot 8}{2}=16$	**2p**
	$AC=5$ și, cum $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{d(B,AC)\cdot AC}{2}$, obținem $d(B,AC)=\frac{32}{5}$	**3p**
6.	$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}45^\circ=1$, $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$	**3p**
	$\frac{2\cos 30^\circ}{2\operatorname{tg}45^\circ+1}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot 1+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}30^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(10))=\begin{vmatrix}11 & 21\\ 10 & 20\end{vmatrix}=11\cdot 20-21\cdot 10=$	**3p**
	$=220-210=10$	**2p**
b)	$A(a)-A(b)=\begin{pmatrix}a-b & 2(a-b)\\ a-b & 2(a-b)\end{pmatrix}=(a-b)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
	$(A(a)-A(b))(A(a)-A(b))=(a-b)^2\begin{pmatrix}3 & 6\\ 3 & 6\end{pmatrix}=3(a-b)^2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=3(a-b)(A(a)-A(b))$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	Pentru orice număr natural n, $\det(A(n))=n$, deci $\det(A(2))+\det(A(3))+\cdots+\det(A(n))=$ $=2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}-1$	**3p**
	$\frac{n(n+1)}{2}-1=35$, deci $n(n+1)=72$ și, cum n este număr natural, obținem $n=8$	**2p**

2.a)	$4*\sqrt{3}=\sqrt{\left(4^2-2\right)(3-2)+2}=\sqrt{4^2-2+2}=$	**3p**
	$=\sqrt{16}=4$	**2p**
b)	$x*\sqrt{3}=\sqrt{3}*x=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=\sqrt{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
	$t*\sqrt{6}=\sqrt{6}*t=\sqrt{3}$, unde t este simetricul lui $x=\sqrt{6}$, deci $\sqrt{4\left(t^2-2\right)+2}=\sqrt{3}$, de unde $t^2=\frac{9}{4}$ și, cum $t\in M$, obținem $t=\frac{3}{2}$, care convine	**3p**
c)	$\sqrt{2}*x=\sqrt{(2-2)\left(x^2-2\right)+2}=\sqrt{2}$, unde $x\in M$	**2p**
	$\sqrt{2}*\sqrt{3}*\sqrt{4}*\ldots*\sqrt{2020}=\sqrt{2}*\left(\sqrt{3}*\sqrt{4}*\ldots*\sqrt{2020}\right)=\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{x}}(\ln x-1)+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{x}\ln x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{4}{\sqrt{e}}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f\left(\frac{1}{e}\right)=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)$, deci $y=-\frac{4}{\sqrt{e}}$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$	**3p**
	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$, deci $f(x)\ge-\frac{4}{\sqrt{e}}$, de unde obținem $\sqrt{e}f(x)+4\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=-1=f(0)\Rightarrow$ funcția f este continuă în $x=0$	**3p**
	f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)\Rightarrow f$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\frac{3x-1}{x+1}\,dx=\int_1^2\frac{3x+3-4}{x+1}\,dx=\int_1^2\left(3-\frac{4}{x+1}\right)dx=\left(3x-4\ln(x+1)\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=6-4\ln 3-3+4\ln 2=3+4\ln\frac{2}{3}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^0 e^x f(x)\,dx=\int_{-1}^0 e^x(2x-1)\,dx=e^x(2x-3)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=e^0\cdot(-3)-e^{-1}\cdot(-5)=\frac{5-3e}{e}$	**2p**