UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul FMI, Ediţia a IV-a
19 mai 2018
Subiect la Matematică - clasa a XI-a

Subiectul 1 *În mulţimea S_3 a permutărilor de gradul 3 se consideră permutările:*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinaţi ba şi c^{12}.

(ii) Rezolvaţi ecuaţia $ax = cb$, $x \in S_3$.

Subiectul 2 *Fie $\varepsilon = \dfrac{-1 + i \cdot \sqrt{3}}{2}$ şi matricea*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{bmatrix}.$$

(i) Arătaţi că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ şi că $\varepsilon^3 = 1$.

(ii) Calculaţi A^2, A^4 şi arătaţi că $\det(A^{2018}) = -3^{3027}$.

Subiectul 3 *Calculaţi următoarele limite:*

(i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{\sin(\pi x)}$;

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Subiectul 4 *Arătaţi că şirul $x_n = \sin n$, $(\forall) n \geq 0$, nu este convergent.*

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu note cuprinse între 1 şi 10.

Timp de lucru: 3 ore.

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul FMI, Ediţia a IV-a
19 mai 2018
Soluţii şi barem de corectare la Matematică - clasa a XI-a

Subiectul 1 *În mulţimea S_3 a permutărilor de gradul 3 se consideră permutările:*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinaţi ba şi c^{12}.

(ii) Rezolvaţi ecuaţia $ax = cb$, $x \in S_3$.

Barem: Start ..... **(1p)**

Prin calcul direct se obţine

$$ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

respectiv

$$c^3 = c^2 \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e,$$

de unde rezultă $c^{12} = (c^3)^4 = e^4 = e$ ..... **(4p)**

(ii) Înmulţind ecuaţia la stânga cu a^{-1} rezultă

$$x = a^{-1}cb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e \qquad \textbf{(5p)}$$

Subiectul 2 *Fie $\varepsilon = \dfrac{-1 + i \cdot \sqrt{3}}{2}$ şi matricea*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{bmatrix}.$$

(i) Arătaţi că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ şi că $\varepsilon^3 = 1$.

(ii) Calculaţi A^2, A^4 şi arătaţi că $\det(A^{2018}) = -3^{3027}$.

Barem: Start ..... **(1p)**

(i) Se verifică prin calcul direct $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ ..... **(2p)**

Din $\varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0$ rezultă $\varepsilon^3 = 1$ ..... **(1p)**

(ii) Din

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 & \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 \\ \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 & \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 & 2\varepsilon^3 + 1 \\ \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 & 2\varepsilon^3 + 1 & \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 \end{bmatrix}$$

şi egalităţile de la (i) rezultă

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{2p}$$

Urmează

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \textbf{2p}$$

Din $\det A = 3(\varepsilon - \varepsilon^2) = 3(\varepsilon - (-\varepsilon - 1)) = 3(2\varepsilon + 1) = 3i\sqrt{3}$ rezultă $\det\left(A^{2018}\right) = (\det(A))^{2018} = \left(3i\sqrt{3}\right)^{2018} = -3^{3027}$ ..... **(2p)**

Subiectul 3 *Calculaţi următoarele limite:*

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Barem: Start ..... **(1p)**

(i) Din

$$\frac{1-x^2}{\sin(\pi x)} = (1+x)\cdot \frac{1}{\dfrac{\sin(\pi - \pi x)}{1-x}} = (1+x)\cdot \frac{1}{\pi}\cdot \frac{1}{\dfrac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)}}$$

rezultă prin trecere la limită că $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)} = \dfrac{2}{\pi}$ ..... **(4p)**

(ii) Din

$$\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\cdot \frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\cdot \frac{1}{2}\cdot \left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2$$

rezultă prin trecere la limită că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \dfrac{1}{4}$ ..... **(5p)**

Subiectul 4 *Arătaţi că şirul* $x_n = \sin n$, $(\forall) n \geq 0$, *nu este convergent.*

Barem: Start ..... **(1p)**

Reducere la absurd; presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$ ..... **(2p)**

Din egalitatea $2\cos n \sin 1 = \sin(n+1) - \sin(n-1) = x_{n+1} - x_{n-1}$ şi din $\sin 1 \neq 0$ rezultă prin trecere la limită că $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$ ..... **(3p)**

Din egalitatea $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ se obţine prin trecere la limită $L^2 = 1$, adică $L \in \{-1, 1\}$; $L \neq 0$ **(2p)**

Trecând la limită în egalitatea $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$ rezultă $L = L \cdot \cos 1$, de unde $\cos 1 = 1$ – contradicţie ..... **(2p)**

O a doua variantă de soluţie:

Barem: Start ..... **(1p)**

Reducere la absurd; presupunem că şirul este convergent, există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$ ..... **(2p)**

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ intervalul $\left[2k\pi + \dfrac{\pi}{4}, 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4}\right]$ are lungimea egală cu $\dfrac{\pi}{2} > 1$, deci conţine cel puţin un număr natural n'_k; pe aceste intervale funcţia sin ia valori mai mari sau egale decât $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ..... **(3p)**

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ intervalul $\left[2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right]$ are lungimea egală cu $\frac{\pi}{2} > 1$, deci conţine cel puţin un număr natural n_k''; pe aceste intervale funcţia sin ia valori mai mici sau egale decât $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ..... (**3p**)

Subşirurile $(\sin n_k')$, $(\sin n_k'')$ ale lui (x_n) au aceeaşi limită, L; din cele de mai sus rezultă $L \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, respectiv $L \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – contradicţie ..... (**1p**)

Notă: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.