UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul FMI, Ediţia a V-a
11 mai 2019
Subiect la Matematică - clasa a XI-a

Subiectul 1 *Pentru $n \in \{1, 2\}$ calculaţi limitele*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^n}.$$

Subiectul 2 *Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia*

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 3 & 9 & 81 \\ x & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Subiectul 3 *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$. Ştiind că limitele*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{x^n \cdot f(x)}$$

există şi sunt numere reale strict pozitive pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, calculaţi valorile acestor limite. (Cu $f^{(n)}$ se notează derivata de ordinul n a funcţiei f.)

Subiectul 4 *Se consideră matricea*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(i) Pentru $m \in \mathbb{N}^*$ calculaţi $\det(A^m)$ şi $\det(A^m - I_3)$.
(ii) Arătaţi că are loc egalitatea

$$A^3 - 9A^2 + 23A - 15I_3 = O_3.$$

(iii) Arătaţi că pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ suma tuturor elementelor matricei A^n este egală cu $3 \cdot 5^n$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu note cuprinse între 1 şi 10.

Timp de lucru: 3 ore.

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul FMI, Ediţia a V-a
11 mai 2019
Soluţii şi barem de corectare la Matematică - clasa a XI-a

Subiectul 1 *Pentru $n \in \{1, 2\}$ calculaţi limitele*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^n}.$$

Barem: Start ..... **(1p)**
Pentru $n = 2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)} \\ &= 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2\cdot(\sqrt{1-x^2}+1)} = -\frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

..... **(5p)**
Pentru $n = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}\right) = 0\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \qquad \textbf{(4p)}$$

Subiectul 2 *Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia*

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 3 & 9 & 81 \\ x & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Barem: Start ..... **(1p)**
Se calculează determinantul din ecuaţie: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 3 & 9 & 81 \\ x & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 6x(x^3 - 19\,x + 30)$ ..... **(3p)**
Deoarece din expresia determinantului se observă că acesta este nul pentru $x = 2$ (cât şi pentru $x = 3$) se factorizează expresia $x^3 - 19\,x + 30$ cu factorul $x - 2$:
$x^3 - 19\,x + 30 = (x^3 - 8) - 19x + 38 = (x-2)(x^2+2x+4) - 19(x-2) = (x-2)(x^2+2x-15) =$
$(x-2)(x-3)(x+5)$ ..... **(3p)**
Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $6x(x-2)(x-3)(x+5) = 0$ şi are soluţiile $\{-5, 0, 2, 3\}$. .... **(3p)**

Subiectul 3 *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$. Ştiind că limitele*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{x^n\cdot f(x)}$$

există şi că valorile lor sunt numere reale strict pozitive pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, calculaţi valorile acestor limite. (Cu $f^{(n)}$ se notează derivata de ordinul n a funcţiei f.)

Barem: Start ..... **(1p)**

Notăm $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x)}{x^n\cdot f(x)} = l_n > 0$; avem $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\cdot f(x) = +\infty$ şi

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = \left(\lim_{x\to+\infty} x^n\cdot f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{x^n\cdot f(x)}\right) = (+\infty)\cdot l_n = +\infty,$$

prin urmare limitele din problemă sunt în caz de nedeterminare $\dfrac{\infty}{\infty}$ ..... **(1p)**

Pentru $n\geq 1$ arbitrar calculăm

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(f^{(n)}\right)'(x)}{(x^n\cdot f(x))'} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(x)}{nx^{n-1}\cdot f(x)+x^n\cdot 2xf(x)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}\cdot f(x)}\cdot\frac{1}{\frac{n}{x^2}+2}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}\cdot f(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{n}{x^2}+2} = l_{n+1}\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

..... **(4p)**

Rezultă, aplicând regula lui l'Hôpital, că avem $l_n = \frac{l_{n+1}}{2} \Leftrightarrow l_{n+1} = 2l_n$ pentru orice $n\geq 1$ ..... **(2p)**

Deoarece $l_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{x\cdot f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2xf(x)}{xf(x)} = 2$ se obţine că $l_n = 2^n$ pentru orice $n\geq 1$ ..... **(3p)**

Notă. O altă variantă de soluţie (care nu utilizează ipoteza că limitele din enunţ există şi sunt numere reale strict pozitive) se bazează pe faptul că pentru orice număr natural $n\geq 1$ există un polinom P_n de grad cel mult egal cu $n-1$ astfel încât $f^{(n)}(x) = f(x)\cdot(2^n x^n + P_n(x))$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Demonstraţia acestei afirmaţii se face prin inducţie după $n\geq 1$, iar finalizarea soluţiei urmează imediat.

Subiectul 4 *Se consideră matricea*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 6\\ -2 & 1 & 5\end{bmatrix}.$$

(i) Pentru $m\in\mathbb{N}^*$ calculaţi $\det(A^m)$ *şi* $\det(A^m - I_3)$.

(ii) Arătaţi că are loc egalitatea

$$A^3 - 9A^2 + 23A - 15I_3 = O_3.$$

(iii) Arătaţi că pentru orice număr natural $n\in\mathbb{N}^*$ suma tuturor elementelor matricei A^n este egală cu $3\cdot 5^n$.

Barem: Start ..... **(1p)**

(i) Se calculează $\det A = 15$ şi $\det(A - I_3) = 0$ ..... **(2p)**

Rezultă $\det(A^m) = (\det A)^m = 15^m$ ..... **(1p)**

$\det(A^m - I_3) = \det((A-I_3)(A^{m-1}+\cdots+A+I_3)) = \det(A-I_3)\cdot\det(A^{m-1}+\cdots+A+I_3) = 0$ **(1p)**

(ii) Se calculează $A^2 = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 18\\ -20 & 13 & 44\\ -14 & 6 & 27\end{bmatrix}$ şi $A^2 - 9A + 23I_3 = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0\\ -2 & 9 & -10\\ 4 & -3 & 5\end{bmatrix}$, apoi se arată prin calcul direct că $A(A^2 - 9A + 23I_3) = 15I_3$, egalitate echivalentă cu cea din cerinţa problemei ..... **(2p)**

(iii) Se calculează $A^3 = \begin{bmatrix} -53 & 31 & 116\\ -134 & 63 & 258\\ -80 & 31 & 143\end{bmatrix}$; suma elementelor lui A este $15 = 3\cdot 5$, cea a lui A^2 este $75 = 3\cdot 5^2$, cea a lui A^3 este $375 = 3\cdot 5^3$ ..... **(1p)**

Din egalitatea de la (ii) se deduce că $A^{n+3} = 9A^{n+2} - 23A^{n+1} + 15A^n$ pentru orice $n\geq 1$; proprietatea din problemă se demonstrează apoi prin inducţie după n ..... **(2p)**

Notă: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.