Concursul Facultăţii de Matematică şi Informatică
Proba de Matematică - Clasa a XI-a
12 aprilie 2025
Versiunea 1

- Timp de lucru: 3 ore.
- Vă rugăm verificați corespondența între versiunea de subiect de pe acest formular cu versiunea de pe formularul de completare a răspunsurilor (partea din stânga sus).
- Vă rugăm completați ID-ul numeric care v-a fost comunicat prin email înaintea concursului pe formularul de completare a răspunsurilor, în partea dreaptă sus, prin umplerea cercurilor corespunzătoare pe coloane.
- Vă rugăm completați cu majuscule numele și prenumele, precum și prenumele tatălui. **Punctajul și semnătura se vor trece la momentul corectării grilei.**
- Pentru toate problemele **un singur răspuns este corect**.
- Fiecărei probleme i s-au atribuit 6 puncte. Punctajul cumulat este egal cu 90. Cu cele 10 puncte acordate din oficiu rezultă un maxim de 100 de puncte, care corespunde notei 10.
- Marcați cât mai vizibil răspunsul pe care îl considerați corect, prin umplerea cerculetului corespunzător, cu pix de culoare închisă (albastru sau negru).
  Exemplu: ●
- Este **strict interzisă** modificarea în orice fel a porțiunii din partea de jos a grilei de completare a răspunsurilor, marcată cu textul "Form Identifier — DO NOT MARK"

1. [6 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pentru $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?
   A. f este discontinuă în 0
   B. f este continuă, dar nu este derivabilă în 0
   C. f este derivabilă, dar f' nu este continuă în 0
   D. f este de clasă C^1
   E. f este de două ori derivabilă în 0
   F. f' este nemărginită într-o vecinătate a lui 0
2. [6 puncte] Câte soluții $x \in \mathbb{R}$ are ecuația $x = \cos x$?
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4
   F. o infinitate

3. [6 puncte] Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

   A. 0

   B. 1

   C. ∞

   D. Nu există

   E. -1

   F. e

4. [6 puncte] Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+4n+2}\}$, unde $\{a\}$ notează partea fracţionară a numărului $a \in \mathbb{R}$.

   A. $\frac{1}{2}$

   B. $\frac{2}{3}$

   C. $\frac{1}{3}$

   D. 1

   E. 0

   F. Nu există

5. [6 puncte] Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Atunci suma elementelor lui A^{2025} este

   A. 2023

   B. 2024

   C. 2025

   D. 2026

   E. 2027

   F. 2028

6. [6 puncte] Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x+\sin(2x)+\cdots+\sin(2025x)}{2025x}$.

   A. 1

   B. Nu există

   C. 1008

   D. 0

   E. $+\infty$

   F. $-\infty$

7. [6 puncte] Fie $a \in \mathbb{R}$. Considerăm şirul definit prin

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Valorile lui a pentru care şirul este convergent la 1 sunt

   A. $a \in [0,2]$

   B. $a \in [0,2)$

   C. $a \in (2,\infty)$

   D. $a \in (-\infty,0)$

   E. $a \in (0,2)$

   F. $a \in (-\infty,0)\cup(2,\infty)$

8. [6 puncte] Valoarea lui $r \in \mathbb{R}$ pentru care

$$\lim_{n\to\infty} n^r \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

există, este finită şi nenulă este:

A. 0

B. 2

C. -2

D. 1

E. -1

F. 3

9. [6 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm punctele $A(-2,1)$, $B(4,-1)$, $C(2,3)$ şi $D(0,-3)$. Câte dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(i) $ABCD$ este paralelogram;

(ii) $ACBD$ este paralelogram;

(iii) $ABCD$ este romb;

(iv) $ACBD$ este romb;

(v) $ADBC$ este dreptunghi;

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. 5

10. [6 puncte] Şirul $a_n = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + n\pi\right)$ este :

A. nemărginit

B. monoton crescător

C. monoton descrescător

D. convergent

E. cu valori negative

F. divergent

11. [6 puncte] Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $\det A = 3$, iar $\det(3A) = 81$, atunci $\det(4A)$ este egal cu

A. 192

B. 48

C. 182

D. 2000

E. 4

F. 2025

12. [6 puncte] Dacă $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, iar $M = \{A^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, atunci numărul de elemente ale lui M este

A. 1

B. 4

C. 3

D. 2

E. 0

F. ∞

13. [6 puncte] Fie $A = \begin{bmatrix} x & x & 2 \\ m & x & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (0, 1)$

B. $m \in (-1, 1)$

C. $m \in \mathbb{R}^*$

D. $m \in \emptyset$

E. $m \in (-1, 0)$

F. $m = \sqrt{2}$

14. [6 puncte] Se consideră determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+2)^2 & (a+1)^2 & a^2 \\ (b+2)^2 & (b+1)^2 & b^2 \\ (c+2)^2 & (c+1)^2 & c^2 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Atunci

A. $\Delta = 2(a-b)(b-c)(c-a)$

B. $\Delta = 4(a-b)(b-c)(c-a)$

C. $\Delta = 8(a-b)(b-c)(c-a)$

D. $\Delta = -2(a-b)(b-c)(c-a)$

E. $\Delta = -4(a-b)(b-c)(c-a)$

F. $m = -8(a-b)(b-c)(c-a)$

15. [6 puncte] Se consideră $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$ şi $BA = \begin{bmatrix} a & 6 \\ 7 & b \end{bmatrix}$. Atunci valorile numerelor a şi b sunt

A. 0 şi 4

B. 2 şi 3

C. 4 şi 10

D. 2 şi 7

E. 7 şi 11

F. 4 şi 3

Concursul Facultăţii de Matematică şi Informatică
Proba de Matematică - Clasa a XI-a
12 aprilie 2025
Versiunea 1

1. [6 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pentru $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?
   A. f este discontinuă în 0
   B. f este continuă, dar nu este derivabilă în 0
   C. f este derivabilă, dar f' nu este continuă în 0
   D. f este de clasă C^1
   E. f este de două ori derivabilă în 0
   F. f' este nemărginită într-o vecinătate a lui 0

Soluţie: f este de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}^*$ fiind o compusă de funcții elementare. Cum $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, f este derivabilă în 0 și $f'(0) = 0$. De asemenea, $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ pentru $x \neq 0$. f' nu este continuă în 0 întrucât nu există $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$. Pe de alta parte, pentru $x \in (-1, 1)$, $|f'(x)| \leq 2|\sin(1/x)| + |\cos(1/x)| \leq 3$.

2. [6 puncte] Câte soluții $x \in \mathbb{R}$ are ecuația $x = \cos x$?
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4
   F. o infinitate

Soluţie: Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x - \cos x, x \in \mathbb{R}$. Cum $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0, x \in \mathbb{R}$, funcția f este monoton crescătoare. Ea este

și injectivă. Într-adevăr, dacă pentru $a < b$, avem $f(a) = f(b)$, funcția f ar fi constantă pe intervalul $[a, b]$, ceea ce ar fi imposibil deoarece derivata se anulează doar pe o mulțime discretă. De asemenea, cum $f(0)f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$, iar f are proprietatea lui Darboux, ea are o singura rădăcină reală.

3. [6 puncte] Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

   A. 0

   B. 1

   C. ∞

   D. Nu există

   E. -1

   F. e

Soluţie: Se aplică lema lui Stolz-Césaro. Avem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Ştim că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)} = 1$ (limită remarcabilă), deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{n}{n+1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

4. [6 puncte] Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \{\sqrt{n^2+4n+2}\}$, unde $\{a\}$ notează partea fracţionară a numărului $a \in \mathbb{R}$.

   A. $\frac{1}{2}$

   B. $\frac{2}{3}$

   C. $\frac{1}{3}$

   D. 1

   E. 0

   F. Nu există

Soluţie: Avem că

$$(n+1)^2 < n^2+4n+2 < (n+2)^2, \text{ deci } n+1 < \sqrt{n^2+4n+2} < n+2.$$

Obţinem $[\sqrt{n^2+4n+2}] = n+1$, şi atunci

$$\lim_{n\to\infty} \{\sqrt{n^2+4n+2}\} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+4n+2} - [\sqrt{n^2+4n+2}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+4n+2} - (n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+4n+2)-(n+1)^2}{\sqrt{n^2+4n+2}+(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+4n+2}+(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}+1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{2} = 1.$$

5. [6 puncte] Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Atunci suma elementelor lui A^{2025} este

   A. 2023

   B. 2024

   C. 2025

   D. 2026

   E. 2027

   F. 2028

Soluţie: Se demonstrează inductiv că

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atunci suma elementelor lui A^{2025} este 2027.

6. [6 puncte] Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(2025x)}{2025x}$.

   A. 1

   B. Nu există

   C. 1008

   D. 0

   E. $+\infty$

   F. $-\infty$

Soluţie: Folosind $|\sin x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ avem că

$$\left|\frac{\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(2025x)}{2025x}\right| \leq \frac{|\sin x| + |\sin(2x)| + \cdots + |\sin(2025x)|}{2025x}$$

$$\leq \frac{2025}{2025x} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

deci din criteriul majorării rezultă că limita căutată este 0.

7. [6 puncte] Fie $a \in \mathbb{R}$. Considerăm şirul definit prin

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Valorile lui a pentru care şirul este convergent la 1 sunt

A. $a \in [0, 2]$

B. $a \in [0, 2)$

C. $a \in (2, \infty)$

D. $a \in (-\infty, 0)$

E. $a \in (0, 2)$

F. $a \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Soluţie: Recurenţa se rescrie sub forma

$$x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2.$$

Folosind substituţia $y_n = x_n - 1$, obţinem $y_{n+1} = y_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $y_n = y_0^{2^n}$, deci $x_n = 1 + (x_0 - 1)^{2^n} = 1 + (a-1)^{2^n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $|a - 1| > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, deci şirul este divergent.

Dacă $|a - 1| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Dacă $|a - 1| = 1$, atunci $x_n = 2 \quad \forall n \geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Obţinem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \Leftrightarrow a - 1 \in (-1, 1) \Leftrightarrow a \in (0, 2).$$

8. [6 puncte] Valoarea lui $r \in \mathbb{R}$ pentru care

$$\lim_{n\to\infty} n^r \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

există, este finită şi nenulă este:

A. 0

B. 2

C. -2

D. 1

E. -1

F. 3

Soluţie: Notând $s_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ avem

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < s_n < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+2n}} < s_n < \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2\sqrt{n^2+2n}} < \frac{s_n}{n} < \frac{n+1}{2\sqrt{n^2+1}}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2\sqrt{n^2+2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2}$, din criteriul cleştelui deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n^r s_n = \lim_{n\to\infty} n^{r+1} \frac{s_n}{n} = \begin{cases} \infty & , r > -1 \\ 0 & , r < -1 \\ \frac{1}{2}, & r = -1, \end{cases}$$

deci $r = -1$.

9. [6 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm punctele $A(-2,1)$, $B(4,-1)$, $C(2,3)$ şi $D(0,-3)$. Câte dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

   (i) $ABCD$ este paralelogram;

   (ii) $ACBD$ este paralelogram;

   (iii) $ABCD$ este romb;

   (iv) $ACBD$ este romb;

   (v) $ADBC$ este dreptunghi;

   A. 0

   B. 1

   C. 2

   D. 3

   E. 4

   F. 5

Soluţie: Se observă că $ACBD$, deci şi $ADBC$, este un pătrat. Rezultă că afirmaţiile (ii), (iv) şi (v) sunt adevărate.

10. [6 puncte] Şirul $a_n = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + n\pi\right)$ este :

A. nemărginit

B. monoton crescător

C. monoton descrescător

D. convergent

E. cu valori negative

F. divergent

Soluţie: Avem

$$a_n = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos(n\pi) + \sin(n\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-1)\cdot(-1)^n = (-1)^{n+1},$$

deci $a_{2n} = -1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$ şi $a_{2n+1} = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Obţinem că şirul (a_n) este divergent.

11. [6 puncte] Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $\det A = 3$, iar $\det(3A) = 81$, atunci $\det(4A)$ este egal cu

A. 192

B. 48

C. 182

D. 2000

E. 4

F. 2025

Soluţie: Folosind proprietăţile determinantului avem că

$$81 = \det(3A) = 3^n \det A = 3^{n+1}, \text{ deci } n = 3.$$

Atunci $\det(4A) = 4^n \det(A) = 4^3 \cdot 3 = 192$.

12. [6 puncte] Dacă $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, iar $M = \{A^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, atunci numărul de elemente ale lui M este

A. 1

B. 4

C. 3

D. 2

E. 0

F. ∞

Soluţie: Avem $A^2 = -I_2$, $A^3 = -A$, $A^4 = I_2$, şi $A^{n+4} = A^n \cdot A^4 = A^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel $M \subset \{A, -I_2, A, I_2\}$. Cum în plus $\pm A, \pm I_2$ sunt distincte două câte două şi incluse în M rezultă că

$$M = \{\pm A, \pm I_2\}.$$

Atunci $|M| = 4$.

13. [6 puncte] Fie $A = \begin{bmatrix} x & x & 2 \\ m & x & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (0, 1)$

B. $m \in (-1, 1)$

C. $m \in \mathbb{R}^*$

D. $m \in \emptyset$

E. $m \in (-1, 0)$

F. $m = \sqrt{2}$

Soluţie: Calculând determinantul matricei A obţinem

$$\det(A) = x^2 - mx + 2m^2.$$

Cum $\Delta = m^2 - 8m^2 = -7m^20$, avem că $\det(A) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $m \in \mathbb{R}^*$.

14. [6 puncte] Se consideră determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+2)^2 & (a+1)^2 & a^2 \\ (b+2)^2 & (b+1)^2 & b^2 \\ (c+2)^2 & (c+1)^2 & c^2 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Atunci

A. $\Delta = 2(a-b)(b-c)(c-a)$

B. $\Delta = 4(a-b)(b-c)(c-a)$

C. $\Delta = 8(a-b)(b-c)(c-a)$

D. $\Delta = -2(a-b)(b-c)(c-a)$

E. $\Delta = -4(a-b)(b-c)(c-a)$

F. $m = -8(a-b)(b-c)(c-a)$

Soluţie: Avem

$$\begin{vmatrix} (a+2)^2 & (a+1)^2 & a^2 \\ (b+2)^2 & (b+1)^2 & b^2 \\ (c+2)^2 & (c+1)^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 - C_3 \\ C_2 \to C_2 - C_3}}{=} \begin{vmatrix} 4a+4 & 2a+1 & a^2 \\ 4b+4 & 2b+1 & b^2 \\ 4c+4 & 2c+1 & c^2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1 - 2C_2}{=}$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2b+1 & b^2 \\ 1 & 2c+1 & c^2 \end{vmatrix} \underset{C_2\to C_2-C_1}{=} 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 4(b-a)(c-a)(c-b) = 4(a-b)(b-c)(c-a)$$

15. [6 puncte] Se consideră $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$ şi $BA = \begin{bmatrix} a & 6 \\ 7 & b \end{bmatrix}$. Atunci valorile numerelor a şi b sunt

A. 0 şi 4

B. 2 şi 3

C. 4 şi 10

D. 2 şi 7

E. 7 şi 11

F. 4 şi 3

Soluţie: Avem $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB) = 14$ şi $\det(BA) = \det(AB) = -2$, de unde obţinem $a + b = 14$ şi respectiv $ab - 42 = -2$, adică $ab = 40$. Ecuaţia de gradul 2 cu rădăcinile a şi b este

$$x^2 - 14x + 40 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-10) = 0,$$

deci $\{a, b\} = \{4, 10\}$.

Să observăm că pentru $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ obţinem $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$ şi $BA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$