UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Concursul FMI, Ediţia VII
Soluţii Proba Matematică, clasa a XII-a - Etapa1
9 aprilie 2022

Variantele corecte sunt marcate cu culoare albastră

Problema 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu 2022 elemente al cărui element neutru este $e \in G$. Ecuaţiile $x^3 = e$, $x^{337} = e$ au în comun exact:
(A) *o soluţie*;
(B) 2 *soluţii*;
(C) 3 *soluţii*;
(D) 4 *soluţii*.

Soluţie: Evident $x = e$ este o soluţie comună. Fie $x_0 \in G$ o soluţie pentru cele două ecuaţii, adică $x_0^3 = e$ şi $x_0^{337} = e$. Deoarece $(3, 337) = 1$ avem că există $k, h \in \mathbb{Z}$ astfel încât $3k + 337h = 1$ şi astfel $x_0 = x_0^{3k+337h} = (x_0^3)^k \cdot (x_0^{337})^h = e$. Deci singura soluţie comună a celor două ecuaţii este $x = e$.
Răspuns corect: (A)

Problema 2. Pe mulţimea $(0, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie:

$$x \star y = \frac{xy}{x+y}, \ \forall x, y > 0.$$

Expresia

$$E = (\sqrt{2}+1) \star (\sqrt{3}+\sqrt{2}) \star \cdots \star (\sqrt{2022}+\sqrt{2021})$$

are valoarea:
(A) $E = \dfrac{\sqrt{2022}-1}{2021}$;
(B) $E = \dfrac{\sqrt{2022}+1}{2021}$;
(C) $E = \dfrac{\sqrt{2021}-1}{2022}$;
(D) $E = \dfrac{\sqrt{2021}+1}{2022}$.

Soluţie: Se arată prin inducţie:

$$a_1 \star a_2 \star \cdots \star a_n = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)^{-1}, \ \forall a_1, \ldots, a_n > 0, \ \forall n \geq 2.$$

Utilizând relaţia de mai sus, deducem:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}\right)^{-1} \\ &= \left[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{2022}-\sqrt{2021})\right]^{-1} \\ &= \left(\sqrt{2022}-1\right)^{-1} = \frac{\sqrt{2022}+1}{2021}, \end{aligned}$$

şi astfel, $E = \dfrac{\sqrt{2022}+1}{2021}$.

Răspuns corect: (B)

Problema 3. Fiind dată legea de compoziţie pe $\mathbb{R}$

$$x \star y = \sqrt[3]{x^3+y^3},\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = x_0 \star x_{n-1},\ \forall n \geq 1$, cu $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat. Valoarea lui x_0 pentru care $x_{2022} = 2023$ este:

(A) $x_0 = \sqrt[3]{2022}$;
(B) $x_0 = \sqrt[3]{2022^2}$;
(C) $x_0 = \sqrt[3]{2023}$;
(D) $x_0 = \sqrt[3]{2023^2}$.

Soluţie: Se arată prin inducţie că $x_n = x_0\sqrt[3]{n+1}, \forall n \geq 0$ şi astfel,

$$x_{2022} = 2023 \Leftrightarrow x_0\sqrt[3]{2023} = 2023 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{2023^2}.$$

Răspuns corect: (D)

Problema 4. Pe mulţimea $[0,\infty)$ definim legea de compoziţie:

$$x \circ y = \ln(e^x + e^y - 1),\ \forall x, y \geq 0.$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$\underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{2022\ ori} = 2x$$

este:

(A) $S = \{0\}$;
(B) $S = \{\ln 2022\}$;
(C) $S = \{0, \ln 2021\}$;
(D) $S = \{0, \ln 2022\}$.

Soluţie: Se arată prin inducţie că:

$$\underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{n\ ori} = \ln(ne^x - n + 1),\ \forall n \geq 2.$$

În consecinţă, ecuaţia de rezolvat devine:

$$\ln(2022e^x - 2021) = 2x \Leftrightarrow 2022e^x - 2021 = e^{2x} \Leftrightarrow e^x \in \{1, 2021\} \Leftrightarrow x \in \{0, \ln 2021\}.$$

Răspuns corect: (C)

Problema 5. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}\,dx$ este:

(A) $\frac{1}{2}$;
(B) $\frac{1}{3}$;
(C) $\frac{2}{3}$;
(D) $\frac{3}{4}$.

Soluţie: Notând $I_n=\int_0^1 \sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}\,dx,\ \forall n\geq 2$ obţinem relaţia:

$$\frac{3}{4}=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx\leq I_n\leq\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt[n]{(1-x)^n+(1-x)^n}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt[n]{x^n+x^n}\,dx=\frac{3}{4}\sqrt[n]{2},\ \forall n\geq 2.$$

Prin trecere la limită în relaţia de mai sus deducem: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}\,dx=\frac{3}{4}$.

Răspuns corect: (D)

Problema 6. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2022x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt$ este:

(A) $\ln 2021$;
(B) $\sin 2021$;
(C) $\ln 2022$;
(D) $\sin 2022$.

Soluţie: Utilizând integrarea prin părti obţinem pentru orice x nenul relaţia:

$$\int_x^{2022x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt=\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 2022x}{2022x}+\int_x^{2022x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt+\int_x^{2022x}\frac{dt}{t},$$

sau echivalent:

$$\int_x^{2022x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt=\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 2022x}{2022x}+\int_x^{2022x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt+\ln 2022.$$

Trecând la limită pentru $x\to 0$ in relaţia de mai sus obţinem că limita căutată este $\ln 2022$. Pentru aceasta am folosit limitele remarcabile $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$ precum şi teorema de medie pentru integrală, de unde există $c_x\in[x,2022x]$ astfel încât $\int_x^{2022x}\frac{\cos t-1}{t}dt=2021x\cdot\frac{\cos c_x-1}{c_x}$.

Răspuns corect: (C)

Problema 7. Dacă $I_1=\int_0^1\sqrt[2022]{1-x^{1011}}\,dx$ şi $I_2=\int_0^1\sqrt[1011]{1-x^{2022}}\,dx$ atunci:

(A) $I_1=1011I_2$;
(B) $I_1=2022I_2$;
(C) $I_1=I_2$;
(D) $I_1=2I_2$.

Soluţie: Observăm că funcţia $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(x)=\sqrt[2022]{1-x^{1011}}$, $\forall x\in[0,1]$, este bijectivă cu inversa $g:[0,1]\to[0,1]$, $g(x)=\sqrt[1011]{1-x^{2022}}$, $\forall x\in[0,1]$. Făcând schimbarea de variabilă $y=f(x)$ urmată de integrare prin părţi, obţinem:

$$I_1=\int_0^1 f(x)\,dx=-\int_0^1 yg'(y)\,dy=\int_0^1 g(y)\,dy=I_2.$$

Răspuns corect: (C)

Problema 8. Valoarea integralei $I=\displaystyle\int_{\frac12}^{2}\frac{(x+1)\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ este:

(A) $I=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{3+\sqrt5}{2}$;

(B) $I=\dfrac{\pi}{4}\ln\dfrac{3+\sqrt5}{2}$;

(C) $I=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{3+\sqrt5}{4}$;

(D) $I=\dfrac{\pi}{4}\ln\dfrac{3+\sqrt5}{4}$.

Soluţie: Făcând schimbarea de variabilă $t=\dfrac1x$ şi folosind identitatea $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac1x=\dfrac{\pi}{2}$, $\forall x>0$, obţinem

$$\begin{aligned}I&=\int_{\frac12}^{2}\frac{(t+1)(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}t)}{t\sqrt{t^2+1}}\,dt\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\int_{\frac12}^{2}\frac{t+1}{t\sqrt{t^2+1}}\,dt-I.\end{aligned}$$

Astfel obţinem

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi}{4}\cdot\int_{\frac12}^{2}\frac{t+1}{t\sqrt{t^2+1}}\,dt\\&=\frac{\pi}{4}\cdot\left(\int_{\frac12}^{2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}+\int_{\frac12}^{2}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}\right)\\&=\frac{\pi}{4}\cdot\left[\ln(t+\sqrt{t^2+1})\,|_{\frac12}^{2}+\left(\ln t-\ln(\sqrt{t^2+1}+1)\right)|_{\frac12}^{2}\right]\\&=\frac{\pi}{2}\ln\frac{3+\sqrt5}{2}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: (A)

Problema 9. Fie $I=\displaystyle\int_0^1 e^{\{2022x\}}\,dx$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real a. Atunci valoarea integralei I este:

(A) $I=\dfrac{1}{e-1}$;

(B) $I = e^{2022}$;
(C) $I = 1 - e^{2022}$;
(D) $I = e - 1$.

Soluţie: Făcând schimbarea de variabilă $t = 2022x$, urmată de schimbarea de variabilă $u = t - k$ obţinem:

$$I = \frac{1}{2022}\int_0^{2022} e^{\{t\}}\,dt = \frac{1}{2022}\sum_{k=0}^{2021}\int_k^{k+1} e^{t-k}\,dt = \frac{1}{2022}\sum_{k=0}^{2021}\int_0^1 e^u\,du = \int_0^1 e^u\,du = e - 1.$$

Răspuns corect: (D)

Problema 10. Fie $\mathrm{End}(\mathbb{Q})$ grupul endomorfismelor mulţimii $\mathbb{Q}$ relativ la operaţia $(f+g)(q) = f(q) + g(q),\ \forall q \in \mathbb{Q}$, pentru orice $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{Q})$. Atunci:
(A) $(\mathrm{End}(\mathbb{Q}), +) \cong (\mathbb{Q}, +)$;
(B) $(\mathrm{End}(\mathbb{Q}), +) \cong (\mathbb{Z}, +)$;
(C) $(\mathrm{End}(\mathbb{Q}), +) \cong (\mathbb{C}, +)$;
(D) $(\mathrm{End}(\mathbb{Q}), +) \cong (\mathbb{R}, +)$.

Soluţie: Pentru $f \in \mathrm{End}(\mathbb{Q})$, dacă notăm $f(1) = a \in \mathbb{Q}$, atunci

$$f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{0.1}$$

Aplicaţia $F : \mathrm{End}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, $F(f) = f(1),\ \forall f \in \mathrm{End}(\mathbb{Q})$, este un izomorfism de grupuri.

Într-adevăr:

$$F(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = F(f) + F(g),\ \forall f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}).$$

F este injectivă deoarece pentru $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{Q})$ cu $F(f) = F(g)$ avem $f(1) = g(1)$ şi astfel din relaţia (0.1) rezultă $f = g$.

F este surjectivă deoarece pentru fiecare $q \in \mathbb{Q}$ există $f_q \in \mathrm{End}(\mathbb{Q})$, $f_q(x) = qx,\ \forall x \in \mathbb{Q}$ astfel încât $F(f_q) = f_q(1) = q$.

Răspuns corect: (A)

Problema 11. Care din afirmaţiile de mai jos este verificată pentru orice matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^5 = 2I_3$?
(A) $\det(A) = 0$;
(B) $\det(A - I_3) \neq 0$;
(C) $\det(A) = 1$;
(D) $\det(A - I_3) = 0$.

Soluţie: Deoarece $I_3 = A^5 - I_3 = (A - I_3)\cdot(A^4 + A^3 + A^2 + A + I_3)$ se obţine că:

$$1 = det(A - I_3)(A^4 + A^3 + A^2 + A + I_3) = det(A - I_3)\cdot det(A^4 + A^3 + A^2 + A + I_3).$$

Rezultă că $\det(A - I_3) \neq 0$.

Răspuns corect: (B)

Problema 12. Se consideră matricile $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $2A + 3B + 6AB = O_3$. Să se specifice care din următoarele egalităţi sunt adevărate:

1. $AB = BA$;
2. $2A + I_3 = (3B + I_3)^{-1}$.

(A) niciuna dintre egalităţi;
(B) numai prima egalitate;
(C) numai cea de-a doua egalitate;
(D) ambele egalităţi.

Soluţie: Se adună matricea unitate la relaţia $2A + 3B + 6AB = O_3$ obţinându-se

$$(2A + I_3)(3B + I_3) = I_3.$$

Rezultă $2A + I_3 = (3B + I_3)^{-1}$. Din relaţia $(3B + I_3)(2A + I_3) = I_3$, se obţine că matricele A şi B comută.

Răspuns corect: (D)

Problema 13. Pentru orice grup $(G, \cdot)$ cu elementul neutru $e \in G$ și pentru orice $a, b \in G$ cu proprietățile $b^6 = e$ și $ab = b^4a$ are loc:

(A) $b = e$
(B) $b^2 = e$;
(C) $b^3 = e$;
(D) niciuna din variantele prezentate nu este adevărată.

Soluţie: Cum $b^2ab = b^6a = a$ rezultă că $b^4a = ab = (b^2ab)b$ de unde, prin simplificare la stânga cu b^2 se obţine că $ab^2 = b^2a$. Atunci

$$ab = b^4a = b^2(b^2a) = b^2(ab^2) = (b^2a)b^2 = (ab^2)b^2 = ab^4 = (ab)b^3.$$

Simplificând la stânga cu ab se obţine că $b^3 = e$.

Răspuns corect: (C)

Problema 14. Valoarea limitei $\lim\limits_{a \searrow 0} \int\limits_a^{\frac{\pi}{2}-a} \dfrac{tgx}{tgx + ctgx}\, dx$ este

(A) $\dfrac{\pi}{2}$;
(B) 0;
(C) $\dfrac{\pi}{4}$;
(D) 1.

Soluţie: Deoarece $\dfrac{tgx}{tgx + ctgx} = \sin^2 x$, pentru orice $x \in \left[a, \dfrac{\pi}{2} - a\right]$, obţinem:

$$\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}-a} \frac{tgx}{tgx + ctgx}\, dx = \int\limits_a^{\frac{\pi}{2}-a} \sin^2 x\, dx = \int\limits_a^{\frac{\pi}{2}-a} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right).$$

Valoarea limitei căutate este deci $\dfrac{\pi}{4}$.

Răspuns corect: (C)

Problema 15. Numărul $2022^{2022}(\mod 11)$ este egal cu:

(A) 0;
(B) 2;
(C) 4;
(D) 6.

Soluţie: Deorece $2022 = 9(\mod 11)$ avem $2022^{2022} = 9^{2022}(\mod 11) = 4(\mod 11)$
Se aplică teorema lui Fermat,conform căreia $9^{10} = 1(\mod 11)$
Răspuns corect: (C)

Problema 16. Numărul morfismelor de la grupul $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ la grupul $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ este:
(A) 1;
(B) 2;
(C) 6;
(D) 9.

Soluţie: $f : (\mathbb{Z}_{18}, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +)$ este morfism de grup dacă $f(\hat{x} + \hat{y}) = f(\hat{x}) + f(\hat{y})$ şi $f(\hat{0}) = \bar{0}$, $\hat{x} \in \mathbb{Z}_{18}$,$\bar{x} \in \mathbb{Z}_{12}$. Rezultă $f(\hat{x}) = \bar{a} \cdot \hat{x}$, $\bar{a} = f(\hat{1})$ şi $18 \cdot a \equiv 0(\mod 12) \Rightarrow 2|a \Rightarrow a \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
Răspuns corect: (C)

Problema 17. Se consideră integralele $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x} dx$ şi $J = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$. Să se verifice care din următoarele variante este corectă :
(A) $I = J = \frac{ln3}{2}$;
(B) $I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot J$ şi $J = \frac{ln3}{2}$;
(C) $I + J = 0$;
(D) $I - J = 0$.

Soluţie: Avem:
$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (tg^2 x + 1) \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (tgx)' \frac{1}{\cos x} dx = \frac{tgx}{\cos x}|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos^2 dx}{\cos^3 x} dx = \frac{tgx}{\cos x} -$
$I + \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx.$
Rezultă
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{tgx}{\cos x}|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin y} dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot J,$
deoarece $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} - y)} (-dy) = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx.$
În plus

$J = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2\frac{x}{2}+1}{2 \cdot tg\frac{x}{2}} dx = \ln(tg\frac{x}{2})|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 3}{2}.$

Rezultă $I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot J$ şi $J = \frac{ln3}{2}$.

Răspuns corect: (B)

Problema 18. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_0^n \{x\}dx$ (unde $\{a\}$ notează partea fracţionară a numărului real a) este:

(A) 1;
(B) $\frac{1}{2}$;
(C) 0;
(D) 2.

Soluţie: Se calculează integrala $\int\limits_{k-1}^{k} \{x\}dx = \int_{k-1}^{k} x-(k-1)dx = \frac{x^2}{2}|_{k-1}^{k} - (k-1)\cdot x|_{k-1}^{k} = \frac{1}{2}$, pentru orice $k = \overline{1,n}$.

Astfel,

$\int\limits_0^n \{x\}dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} \{x\}dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$

Deci,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \int\limits_0^n \{x\}dx = \frac{1}{2}.$

Răspuns corect: (B)

Problema 19. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel unitar, iar $a,b \in A^*$ care verifică relaţiile: $a^2 = b^3 = 0$ şi $a \cdot b = b \cdot a$. Atunci

(A) $1-a$ este inversabil şi $1-b$ nu este inversabil;
(B) $a = b$;
(C) $a + b = 1$;
(D) $1-a$, $1-b$ şi $1-a-b$ sunt inversabile.

Soluţie: $1-a^2 = (1-a)(1+a) \Rightarrow (1-a)(1+a) = 1 \Rightarrow (1-a)^{-1} = 1+a$.
$1-b^3 = (1-b)(1+b+b^2) \Rightarrow (1-b)(1+b+b^2) = 1 \Rightarrow (1-b)^{-1} = 1+b+b^2$.
Se foloseşte Binomul lui Newton pentru
$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4 = 0 \Rightarrow 1-(a+b)$ - inversabil.

Răspuns corect: (D)

Problema 20. Valoarea integrale $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{t \cdot ln^2 t}{t^2+1}\, dt$ este:

(A) 1;
(B) 0;
(C) $\frac{1}{3}$;
(D) $\frac{1}{2}$.

Soluţie: Se face schimbarea de variabilă $t = e^x$. Rezultă

$$\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{t \cdot ln^2 t}{t^2+1} dt = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^x \cdot x^2 \cdot e^x}{e^{2x}+1} dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^{-2x}} dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2}{1+e^{-2x}} dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{1+e^{-2x}} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{2x}} dx +$$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{1+e^{-2x}} dx = \int_0^1 \frac{x^2 \cdot e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-2x}} dx = \int\limits_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Răspuns corect: (C)