UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul FMI - Ediţia a VII-a
Etapa II - 10 aprilile 2022
Soluţii şi barem de corectare la Subiectul de Matematică - clasa a XII-a

Subiectul 1 *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie bijectivă cu $f(2022)=0$ şi legea de compoziţie*

$$x\star y=f(f^{-1}(x)+f^{-1}(y)-2022),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Arătaţi că $(\mathbb{R},\star)$ este un grup comutativ.

Barem: Start **1p**

Se arată că legea de compoziţie este comutativă **1p**

Se arată că legea de compozitie este asociativă:

$$(x\star y)\star z=f(f^{-1}(x)+f^{-1}(y)+f^{-1}(z)-4044)=x\star(y\star z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

..... **2p**

$e\in\mathbb{R}$ este element neutru dacă $x\star e=e\star x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Datorită comutativităţii, este suficient să se determine $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\star e=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ sau echivalent $f(f^{-1}(x)+f^{-1}(e)-2022)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. În consecinţă $f^{-1}(e)=2022$ şi cum $f(2022)=0$ se obţine $e=0$. **2p**

Se arată că pentru fiecare $x\in\mathbb{R}$ există $\tilde{x}\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\star\tilde{x}=\tilde{x}\star x=0$. Datorită comutativităţii, este suficient să se arate că pentru fiecare $x\in\mathbb{R}$ există $\tilde{x}\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\star\tilde{x}=0$ sau echivalent $f(f^{-1}(x)+f^{-1}(\tilde{x})-2022)=0$. **2p**

Din $f(f^{-1}(x)+f^{-1}(\tilde{x})-2022)=0$ şi $f^{-1}(0)=2022$ se obţine $f^{-1}(\tilde{x})=4044-f^{-1}(x)$ şi astfel $\tilde{x}=f(4044-f^{-1}(x))$. **2p**

Subiectul 2 *Calculaţi următoarele limite:*

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1\left(1+\frac{x^n}{n}\right)^n\,dx},$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k(1+kn)}}.$$

Barem: Start **1p**

(a) Notând $I_n=\displaystyle\int_0^1\left(1+\frac{x^n}{n}\right)^n\,dx,\ n\geq 1$ şi folosind integrarea prin părţi se obţine:

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^1 x'\left(1+\frac{x^n}{n}\right)^n\,dx=x\left(1+\frac{x^n}{n}\right)^n\Big|_0^1-\int_0^1 nx^n\left(1+\frac{x^n}{n}\right)^{n-1}\,dx\\
&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-n^2\int_0^1\frac{x^n}{n}\left(1+\frac{x^n}{n}\right)^{n-1}\,dx\\
&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-n^2\int_0^1\left[\left(1+\frac{x^n}{n}\right)-1\right]\left(1+\frac{x^n}{n}\right)^{n-1}\,dx\\
&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-n^2I_n+n^2\int_0^1\left(1+\frac{x^n}{n}\right)^{n-1}\,dx\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-n^2I_n.
\end{aligned}$$

..... **2p**

Din relaţiile de mai sus se deduce inegalitatea:

$$\sqrt[n]{I_n} \geq \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n^2+1}},\ \forall n \geq 2. \tag{1}$$

..... **1p**

Din relaţiile $I_n = \int_0^1 \left(1+\frac{x^n}{n}\right)^n\ dx \leq \int_0^1 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ dx = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \forall n \geq 1$ se obţine:

$$\sqrt[n]{I_n} \leq 1+\frac{1}{n},\ \forall n \geq 2. \tag{2}$$

..... **1p**

Din (1) şi (2) se deduce dubla inegalitate:

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n^2+1}} \leq \sqrt[n]{I_n} \leq 1+\frac{1}{n},\ \forall n \geq 2,$$

şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 \left(1+\frac{x^n}{n}\right)^n\ dx} = 1.$ **2p**

(b) Utilizând binomul lui Newton obţinem pentru $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^1 \left(1+\frac{x^n}{n}\right)^n\ dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{x^{kn}}{n^k}\ dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k} \int_0^1 x^{kn}\ dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k(1+kn)}$$

..... **2p**

Astfel se deduce:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k(1+kn)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n} = 1.$$

..... **1p**

Subiectul 3 *În grupul $(G,\cdot)$, al cărui element unitate este $e \in G$, se consideră elementele $x, y \in G$. Să se verifice următoarele afirmaţii:*

a. $x^3 = e$ şi $y^4 = x \cdot y \cdot x^{-1}$, atunci $y^{63} = e$

b. fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x^n = e$ şi $y^m = x \cdot y \cdot x^{-1}$. Atunci $y^{m^n-1} = e$

Barem: Start **1p**

a) Se rescrie relaţia $y^{63} = e \Longleftrightarrow y^{64} = y$ **0.5p**

Se calculează puterile lui y^4 :

$y^8 = x \cdot y^2 \cdot x^{-1}$; $y^{16} = x^2 \cdot y \cdot x^{-2}$; $y^{32} = x^2 \cdot y^2 \cdot x^{-2}$; $y^{64} = x^2 \cdot y^4 \cdot x^{-2} = x^3 \cdot y \cdot x^{-3} = y$; **2p**

Deoarece $x^3 = x^{-3} = e$ rezultă $y^{64} = y$ şi deci $y^{63} = e$ **1p**

b) Se rescrie relaţia $y^{m^n-1} = e \Longleftrightarrow y^{m^n} = y$ **0.5p**

Se calculează puterile lui y^m :

$y^{2\cdot m} = x \cdot y^2 \cdot x^{-1}$; $y^{3\cdot m} = x \cdot y^3 \cdot x^{-1}$; ... ; $y^{m^2} = x \cdot y^m \cdot x^{-1} = x^2 \cdot y \cdot x^{-2}$; ...; $y^{m^3} = x^3 \cdot y \cdot x^{-3}$; ...; $y^{m^n} = x^n \cdot y \cdot x^{-n}$ **4p**

Deoarece $x^n = x^{-n} = e$ rezultă $y^{m^n} = y \Rightarrow y^{m^n-1} = e$ **1p**

Subiectul 4 *Se consideră funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x+1-\sqrt{x^2+1}} & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x+x^5-b}{x-1} & , \quad x \in [0,\, 1) \\ \dfrac{c}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+3}} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Să se determine constantele $a, b, c \in \mathbb{R}$ *astfel încât funcţia* f *să fie primitivabilă pe* $\mathbb{R}$ *şi pentru aceste valori să se calculeze mulţimea primitivelor acesteia.*

Barem: Start **1p**

Funcţia f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Se calculează limitele laterale în $x_0 = 0$

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{a}{2} \cdot (x + 1 + \sqrt{x^2+1}) = a,$$

iar

$\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = b$ **1p**

Se calculează limitele laterale în $x_1 = 1$

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{x - 1 + x^5 - 1 + 2 - b}{x - 1} = \begin{cases} -\infty & , \quad b < 2 \\ 6 & , \quad b = 2 \\ +\infty & , \quad b > 2 \end{cases}$$

şi $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = \dfrac{c}{2}$ **1p**

Dacă f este primitivabilă atunci aceasta nu are discontinuităţi de speţa 1 şi nici una din limitele laterale (dacă există) nu este infinită. Rezultă că $a = b = 2$ şi $c = 12$ **1.5p**

Se calculează primitiva funcţiei f:

Pe intervalul $(-\infty, 0)$ avem:

$$\int \frac{2 \cdot x}{x + 1 - \sqrt{x^2+1}}\, dx = \int x + 1 + \sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{x}{2} \cdot (2 + x + \sqrt{x^2+1}) + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \mathcal{C} \quad \textbf{1.5p}$$

Pe intervalul $[0,\, 1)$ avem:

$$\int \frac{x + x^5 - 2}{x - 1}\, dx = \int (2 + x + x^2 + x^3 + x^4)\, dx = 2 \cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{C}$$ **1.5p**

Pe intervalul $[1,\, \infty)$ avem:

$$\int \frac{12}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+3}}\, dx = -4 \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} + \mathcal{C},$$ (se poate face schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{t}$) **1.5p**

Dacă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţie f atunci există constantele $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \cdot (2 + x + \sqrt{x^2+1}) + \dfrac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c_1 & , \quad x < 0 \\ 2 \cdot x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + c_2 & , \quad x \in [0,\, 1) \\ -4 \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} + c_3 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Din condiţia de continuitate a primitivei se obţin relaţiile între constante: $c_1 = c_2$ şi $c_3 = c_2 + \dfrac{677}{60}$

Notând $c_2 = c \in \mathbb{R}$ obţinem:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}\cdot(2+x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+c & , \quad x<0\\ 2\cdot x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}+c & , \quad x\in[0,\,1)\\ -4\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}+\dfrac{677}{60}+c & , \quad x\geq 1\end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{1p}$$

Notă: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.