Concursul Facultăţii de Matematică şi Informatică
Proba de Matematică - Clasa a XII-a
20 aprilie 2024
Versiunea 1

1. [6 puncte] Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu $f'(x)=(x+1)^2(x-1)(x+e)^4(x-\pi)^7$, $x\in\mathbb{R}$. Câte puncte de maxim local are funcţia f?

   A. 0

   B. 1

   C. 2

   D. 3

   E. 4

   F. 5

   Soluţie: Funcţia f are patru puncte critice: $-e$, -1, 1 şi π. Dintre acestea, $x_1=-1$ şi $x_2=-e$ sunt puncte "şa" (există vecinătăţi ale acestora pe care derivata are semn constant), $x_3=1$ este punct de maxim local, iar $x_4=\pi$ este punct de minim local.

2. [5 puncte] Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2}dt$. Atunci $f'(\frac{\pi}{4})$ are valoarea:

   A. $e^{\frac{\pi^2}{16}}$

   B. 1

   C. $2e$

   D. $-\sqrt{2e}$

   E. $-2\sqrt{e}$

   F. $2e^{\frac{\pi^2}{16}}$

   Soluţie: Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei continue $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t)=e^{t^2}$. Conform formulei Leibnitz-Newton, $f(x)=G(\cos x)-G(\sin x)$, $x\in\mathbb{R}$. Deci f este într-adevăr derivabilă, iar conform Teoremei de derivare a funcţiilor compuse avem că $f'(x)=-g(\cos x)\sin x-g(\sin x)\cos x=-e^{\cos^2 x}\sin x-e^{\sin^2 x}\cos x$, $x\in\mathbb{R}$. Se obţine că $f'(\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2e}$.

3. [6 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f''(x) = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, iar tangenta la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x = 1$ este paralelă cu axa Ox. Atunci legea care defineşte valorile funcţiei f este:

A. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + x + 1$

B. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

C. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$

D. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 1$

E. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1$

F. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$

Soluţie: Panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 1$ este $f'(1)$ şi deci $f'(1) = 0$ (panta dreptei Ox). Cum $(f')'(x) = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, rezultă că există o constantă $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x) = x^2 - 2x + a$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Cum $f'(1) = 0$ se obţine că $a = 1$ şi deci $f \in \int (x^2 - 2x + 1)dx$. Există atunci $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + b$, $x \in \mathbb{R}$. Cum $f(0) = 1$ se obţine că $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

4. [7 puncte] Relativ la funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4^x - 1}{8x \cdot 4^x}$ considerăm următoarele afirmaţii:

(i) f nu are asimptote;

(ii) f are asimptote orizontale spre $-\infty$ şi $+\infty$, dar nu are asimptote verticale;

(iii) f are asimptote orizontale spre $-\infty$ şi $+\infty$ şi o singură asimptotă verticală;

(iv) f are asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi nu are asimptote verticale;

(v) f are asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi o singură asimptotă verticală.

Care dintre aceste afirmaţii este adevărată?

A. doar (i)

B. doar (ii)

C. doar (iii)

D. doar (iv)

E. doar (v)

F. niciuna dintre afirmaţii

Soluţie: Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 - 4^{-x}}{8x} = 0$, rezultă că dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Avem că există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1 - 4^{-x}}{8x} = +\infty$ şi deci graficul funcţiei f nu admite asimptotă orizontală spre $-\infty$.

De asemenea există $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4^x - 1}{x} \frac{1}{8 \cdot 4^x} = \frac{\ln 4}{8}$ şi deci nu există asimptote verticale la graficul funcţiei f.

5. [6 puncte] Pentru care din funcţiile de mai jos aria subgraficului este egală cu

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}\sqrt{3+\frac{4k}{n}}\ ?$$

(i) $f_1:[-6,\,-2]\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{9+x}$;

(ii) $f_2:[0,\,4]\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{3+x}$;

(iii) $f_3:[3,\,4]\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$.

A. numai pentru f_1

B. numai pentru f_2

C. numai pentru f_3

D. numai pentru f_1 şi f_2

E. pentru toate funcţiile

F. pentru niciuna dintre funcţii

Soluţie: Dacă pentru $n\in\mathbb{N}^*$ considerăm diviziunile $d_n^1=\left\{-6+\frac{4k}{n}\ :\ k=\overline{0,n}\right\}$ a intervalului $[-6,\,-2]$, $d_n^2=\left\{\frac{4k}{n}\ :\ k=\overline{0,n}\right\}$ a intervalului $[0,\,4]$ şi sistemele de puncte intermediare $\xi_{d_n^1}=\left\{-6+\frac{4k}{n}\ :\ k=\overline{1,n}\right\}$ asociat diviziunii d_n^1, respectiv, $\xi_{d_n^2}=\left\{\frac{4k}{n}\ :\ k=\overline{1,n}\right\}$ asociat diviziunii d_n^2 avem că, $||d_n^1||=||d_n^2||=\frac{4}{n}\to 0$, iar

$$\sigma\left(f_1;d_n^1,\xi_{d_n^1}\right)=\sigma\left(f_2;d_n^2,\xi_{d_n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}\sqrt{3+\frac{4k}{n}},\ n\geq 1.$$

Deoarece f_1 şi f_2 sunt continue, rezultă că

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}\sqrt{3+\frac{4k}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\sigma\left(f_1;d_n^1,\xi_{d_n^1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sigma\left(f_2;d_n^2,\xi_{d_n^2}\right)=\\ &= \int_{-6}^{-2}\sqrt{9+x}dx=\int_{0}^{4}\sqrt{3+x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3}\Big|_0^4=\\ &= \frac{2}{3}\left(7\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

Prin calcul direct avem că $\int_3^4\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\left(4\sqrt{4}-3\sqrt{3}\right)$.

6. [7 puncte] Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A^3 + 5A - 3I_2 = 0_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Care dintre următoarele matrice este inversa matricei A?

A. $\frac{1}{5}(A^2 - 2I_2)$

B. $\frac{1}{5}(A^2 - 3I_2)$

C. $\frac{1}{3}(A^2 + 5I_2)$

D. $\frac{1}{3}(A^2 - 3I_2)$

E. $\frac{1}{3}(A^2 - 5I_2)$

F. $\frac{1}{5}(A^2 + 3I_2)$

Soluţie: Egalitatea $A^3 + 5A - 3I_2 = 0_2$ este echivalentă cu $A(A^2 + 5I_2) = 3I_2$, ceea ce arată că matricea A este inversabilă şi $A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 + 5I_2)$.

7. [6 puncte] Pe mulţimea $M = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ definim operaţiile:

$$\begin{array}{l} (x,y) * (u,v) = (x+u, y+v) \\ (x,y) \circ (u,v) = (x, yv) \end{array} , \quad (x,y), (u,v) \in M.$$

Care dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?

(P1) $\big((x,y) * (u,v)\big) \circ (z,t) = \big((x,y) \circ (z,t)\big) * \big((u,v) \circ (z,t)\big)$, $(\forall)(x,y),(u,v),(z,t) \in M$;

(P2) $(z,t) \circ \big((x,y) * (u,v)\big) = \big((z,t) \circ (x,y)\big) * \big((z,t) \circ (u,v)\big)$, $(\forall)(x,y),(u,v),(z,t) \in M$;

(P3) "$\circ$" admite element neutru.

A. toate afirmaţiile

B. numai (P1)

C. numai (P2)

D. niciuna dintre afirmaţii

E. numai (P1) şi (P2)

F. numai (P1) şi (P3)

Soluţie: Avem că $\big((x,y) * (u,v)\big) \circ (z,t) = (x+u, y+v) \circ (z,t) = (x+u, yt+vt)$, iar $\big((x,y) \circ (z,t)\big) * \big((u,v) \circ (z,t)\big) = (x, yt) * (u, vt) = (x+u, yt+vt)$, pentru orice $(x,y),(u,v),(z,t) \in M$, ceea ce arată că afirmaţia (P1) este adevărată.

Deoarece $(z,t) \circ \big((x,y) * (u,v)\big) = (z,t) \circ (x+u, y+v) = (z, yt+vt)$, iar $\big((z,t) \circ (x,y)\big) * \big((z,t) \circ (u,v)\big) = (z, yt) * (z, vt) = (2z, yt+vt)$ rezultă că afirmaţia (P2) nu este verificată.

Dacă $(a,b) \in M$ ar fi element neutru al legii de compoziţie "$\circ$", atunci $(a,b) \circ (x,y) = (x,y)$ pentru orice $(x,y) \in M$ sau, echivalent, $(a, by) = (x,y)$ pentru orice $(x,y) \in M$. *Contradicţie.* Rezultă că afirmaţia (P3) nu este verificată.

8. [6 puncte] Pe mulţimea $A = \mathbb{Z}_8$ (a claselor de resturi modulo 8) considerăm operaţiile

$$\begin{array}{l} x * y = x + y + \hat{6} \\ x \circ y = xy - \hat{2}x - \hat{2}y + \hat{6} \end{array}, \qquad x, y \in \mathbb{Z}_8.$$

Cunoscând că $(A, *, \circ)$ este un inel, să se determine mulţimea divizorilor lui zero din acest inel.
Notă: Un element $d \in A$, diferit de elementul nul 0_A al inelului, se numeşte divizor al lui zero dacă există $d' \in A \setminus \{0_A\}$ astfel încât $d \circ d' = 0_A$ sau $d' \circ d = 0_A$.

A. $\{\hat{2}\}$

B. $\{\hat{4}\}$

C. $\{\hat{2}, \hat{4}\}$

D. $\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$

E. $\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\}$

F. $\{\hat{0}, \hat{4}, \hat{6}\}$

Soluţie: Se verifică imediat că elementul nul al inelului este $0_A = \hat{2}$. Dacă $x \in A \setminus \{\hat{2}\}$ este un divizor al lui zero, atunci există $y \in A \setminus \{\hat{2}\}$ astfel încât $x \circ y = \hat{2}$, sau echivalent $(x - \hat{2})(y - \hat{2}) = \hat{0}$. Obţinem că $x \in \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{6}\}$. Se verifică imediat că $\hat{0} \circ \hat{6} = \hat{4} \circ \hat{6} = \hat{2}$, ceea ce arată că mulţimea divizorilor lui zero din inelul $(A, *, \circ)$ este egală cu $\{\hat{0}, \hat{4}, \hat{6}\}$.

9. [7 puncte] Dacă $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $\det(A) = 5$, $\det(B) = -2$, iar A^* notează adjuncta matricii A, atunci $\det(2B^{-1}A^*)$ este egal cu:

A. -5

B. 5

C. -20

D. 20

E. -100

F. 100

Soluţie: Deoarece $\det(B^{-1}) = \big(\det(B)\big)^{-1} = -\dfrac{1}{2}$, $\det(A^*) = \big(\det(A)\big)^2 = 5^2$, avem că $\det(2B^{-1}A^*) = 2^3 \det(B^{-1}) \det(A^*) = 8 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot 5^2 = -100$.

10. [5 puncte] Ordinul elementului $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_7$ este:

A. 1

B. 5

C. 8

D. 6

E. 2

F. 12

Soluţie: Se obţine $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4 \neq e$ (e fiind permutarea identitate din S_7), iar $\sigma^5 = e$. Deci $\text{ord}(\sigma) = 5$.

11. [5 puncte] Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, considerăm sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} ay + bx &= c \\ az + cx &= b \\ bz + cy &= a \end{cases}.$$

Care din afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?

(P1) Sistemul este incompatibil;

(P2) Sistemul este compatibil determinat;

(P3) Sistemul este compatibil nedeterminat;

(P4) Sistemul este compatibil determinat, iar dacă (x_0, y_0, z_0) este soluţia sa atunci $x_0, y_0, z_0 \geq 1$;

(P5) Sistemul este compatibil determinat, iar dacă (x_0, y_0, z_0) este soluţia sa atunci $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$;

A. Numai (P1)

B. Numai (P2)

C. Numai (P2) şi (P4)

D. Numai (P2) şi (P5)

E. Niciuna din afirmaţii

F. Numai (P3)

Soluţie: Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$ şi deci $\det(A) = -2abc \neq 0$. Aceasta arată că sistemul este compatibil unic determinat (deci afirmaţia (P2) este adevărată). Conform formulelor lui Cramer se obţine $x_0 = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos A \in (-1, 1)$ (deoarece $m(\hat{A}) \in (0, \pi)$), $y_0 = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos B \in (-1, 1)$, iar $x_0 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C \in (-1, 1)$. Rezultă că afirmaţia (P5) este şi ea adevărată.

12. [6 puncte] Fie x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile polinomului $X^3 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Următorul determinant

$$\begin{vmatrix} x_1(1 + x_2 - x_3) & x_2(1 + x_3 - x_1) & x_3(1 + x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 & x_3 + x_1 & x_2 + x_3 \\ x_1(x_1^2 - x_2x_3) & x_2(x_2^2 - x_3x_1) & x_3(x_3^2 - x_1x_2) \end{vmatrix}$$

are valoarea:

A. -1

B. 1

C. 0

D. i

E. $-i$

F. $\frac{1+i}{2}$

Soluţie: Observăm, pe baza relaţiilor lui Viète, că $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Adunăm apoi coloanele a doua şi a treia la prima coloană. Noile elemente ale primei coloane au valorile $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $2(x_1 + x_2 + x_3) = 0$, respectiv $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1) = 0$. Prin urmare, determinantul este egal cu 0.

13. [6 puncte] Pentru care dintre valorile numărului natural n specificate mai jos polinomul $(X-1)^n+2X^n+2 \in \mathbb{C}[X]$ se divide cu polinomul $X^2+1 \in \mathbb{C}[X]$?

A. 2

B. 3

C. 4

D. 8

E. 10

F. 2024

Soluţie: Polinomul X^2+1 are rădăcinile i şi $-i$. Prin urmare, conform Teoremei lui Bézout, $(i-1)^n+2i^n+2=0$ şi $(-i-1)^n+2(-i)^n+2=0$. Dacă n este multiplu de 4 (adică $n=4k$ cu $k \in \mathbb{N}$), atunci $i^n=(i^4)^k=1$ şi $(i-1)^n=((i-1)^4)^k=(-4)^k$. Ecuaţia $(i-1)^n+2i^n+2=0$ devine $(-4)^k+4=0$, care are soluţia unică $k=1$. Deducem că $n=4$. Observăm, de asemenea, că $(-i-1)^4+2(-i)^4+2=0$. Calcule similare arată că ecuaţiile de mai sus nu sunt verificate în cazul în care n nu este un multiplu de 4.

14. [5 puncte] Să se determine suma coeficienţilor restului împărţirii polinomului $f=X^{2024}+X^2+1 \in \mathbb{C}[X]$ la polinomul $g=X^{1012}+X^3-2 \in \mathbb{C}[X]$.

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

E. 3

F. 2024

Soluţie: Din teorema împărţirii cu rest există şi sunt unice polinoamele $q, r \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietăţile $f=gq+r$ şi $\text{grad}(r)<\text{grad}(g)$. Observăm că suma coeficienţilor restului r se obţine prin calculul valorii acestui rest în punctul $x=1$. Astfel, suma căutată este $r(1)=f(1)-g(1)q(1)=3-0\cdot q(1)=3$.

15. [7 puncte] Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este fixat, valoarea integralei $I_n=\int_0^1 \{nx\}^{2023}\mathrm{d}x$ (unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real a) este:

A. $I_n=\dfrac{1}{n^3-6n^2+11n+2018}$;

B. $I_n=\dfrac{1}{2024n}$;

C. $I_n=\dfrac{1}{2024}$

D. $I_n=\dfrac{1}{n^2-3n+2026}$

E. $I_n=\dfrac{1}{2023n+1}$;

F. $I_n=\dfrac{1}{2025n-1}$

Soluţie: Funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{nx\}$ este periodică de perioadă $T=\dfrac{1}{n}$ şi

atunci

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \{nx\}^{2023}\mathrm{d}x = n\int_0^{1/n} \{nx\}^{2023}\mathrm{d}x = n\int_0^{1/n} (nx)^{2023}\mathrm{d}x = \\ &= n^{2024}\frac{x^{2024}}{2024}\Big|_0^{1/n} = \frac{1}{2024}. \end{aligned}$$