ALAC I | XI | 2026 | P1

Câte secvențe binare de 8 cifre încep cu 1 sau se termină cu 00?

---

met I: $N = (a_1 a_2 \dots a_8)$

Cz I: $a_1 = 1$, restul pot fi oricum, fiecare dintre $a_2, a_3, \dots, a_8$ poate fi 0 sau 1 $\Rightarrow$ sunt 2 variante pt fiecare $\Rightarrow 2^7 = 128$ variante

Cz II: $a_1 \neq 1 \Rightarrow a_1 = 0$, $(a_7 a_8) = \overline{00}$
$\Rightarrow$ rămân $a_2, a_3, \dots, a_6$ adică 5 cifre, fiecare poate fi 0 sau 1 $\Rightarrow 2^5 = 32$ variante

Deoarece $\nexists$ numere comune în cele 2 cazuri $\Rightarrow$
$128 + 32 = 160$

met II: este vorba de numere care încep cu 1 sau se termină cu (00), $N = (a_1 a_2 \dots a_8)$

Cz I: $a_1 = 1 \Rightarrow (1 a_2 a_3 \dots a_8)$ cu $a_2 \to 2v$, $a_3 \to 2v$, $\dots$, $a_8 \to 2v$ } $\Rightarrow 2^7 = 128$
(ordine)

Cz II: $a_7 = 0$, $a_8 = 0 \Rightarrow (a_1 a_2 \dots a_6 00)$
$a_1 \to 2v$, $a_2 \to 2v$, $\dots$, $a_6 \to 2v \Rightarrow 2^6 = 64$ nr

Printre acestea, avem și unele care încep cu 1 și se termină cu (00) $\Rightarrow (1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 00) \Rightarrow a_2, a_3, \dots, a_6$ pot fi 0 sau 1 $\Rightarrow 2^5 = 32v$

$\Rightarrow \text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}(A \cap B)$
$\Rightarrow \text{card}(A \cup B) = 128 + 64 - 32 = 160v$

ALACI | XL | 2026 | P2

Prin scrierea alăturată a tuturor numerelor naturale de la 1 la 1000 se obține

$N = 123456789101112 \ldots 1000$

Ce cifră se află pe poziția 2026 ?

E_1) nr. de 1 cifră: 1, 2, ..., 9 → 1-9 poziții

E_2) nr de 2 cifre: 10, 11, ..., 99 → sunt $99-9=90$ nr
cu 2 cifre → 180 cifre → poziții | 10 → 189 poziții

E_3) nr. de 3 cifre: 100, 101, 102, ..., 999 → sunt $999-99=900$ nr
de 3 cifre → $900 \times 3 = 2700$ cifre → poziții 190 → 2889 poziții

depășește poziția 2026

E_4) până la poziția 189 sunt ocupate cu numere de 1 sau de 2 cifre, de la 190 până la 2026 sunt nr. de 3 cifre → $2026 - 189 = 1837$ poziții sunt ocupate cu nr de 3 cifre

$1837 : 3 = 612$ rest 1 → sunt 612 nr. de 3 cifre și rămâne prima cifră

⇒ am folosit primele 612 nr. de 3 cifre (de la 100 la 711) prima cifră a numărului următor, adică a numărului 712 iar prima sa cifră este 7

Răspuns: 7

ALAC1 / XI / 2026 / P3

Soluția ecuației $(2x)^{\lg 2} = (3x)^{\lg 3}$ este fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$ cu $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Se cere $2b - 3a$

$(2x)^{\lg 2} = (3x)^{\lg 3} \mid \lg(\dots)$

$\Leftrightarrow \lg 2 \lg(2x) = \lg 3 \lg(3x)$

$\Leftrightarrow \lg 2(\lg 2 + \lg x) = \lg 3(\lg 3 + \lg x)$

$\Leftrightarrow \lg x(\lg 2 - \lg 3) = \lg^2 3 - \lg^2 2$

$\Leftrightarrow \lg x(\lg 2 - \lg 3) = (\lg 3 - \lg 2)(\lg 3 + \lg 2) \mid :(\lg 3 - \lg 2) \neq 0$

$\Rightarrow \lg x = -(\lg 3 + \lg 2)$

$\Rightarrow \lg x = -\lg 6 \to \lg x = \lg 6^{-1} \Rightarrow x = 6^{-1}$

$f(x) = \lg x$ injectivă

$\Rightarrow x = \frac{1}{6}$ ireductibilă $\Rightarrow a = 1, b = 6$

$2b - 3a = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 = 9$

ALACI | XL | 2026 | P4

$x \in [0, \pi]$ cu $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$

Se cere $\cos^2(2x)$

$E_1)$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \,/\,()^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}_{3/4} = 1$

$\Rightarrow 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2}$

$E_2)$ $\underbrace{\sin^2(2x)}_{\frac{1}{2}} + \cos^2(2x) = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{4} + \cos^2(2x) = 1 \Rightarrow \cos^2(2x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ALACI | XI | 2026 | P5

ABCDEF hexagon iar în vârfuri așezăm aleatoriu ∂, #, %, *, £, $ fiecare simbol fiind folosit o singură dată.

Calculați probabilitatea ca simbolurile # și * să fie în 2 vârfuri alăturate iar % și ∂ să fie tot în 2 vârfuri alăturate

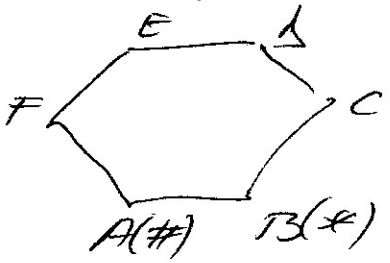
---

$E_1) P = \frac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: așezăm 6 simboluri din 6 posibile, contează ordinea $\Rightarrow 6! = 720$ v

$E_3)$ nr. caz favorabile: perechea $P_1 = \{\#, *\}$ să fie în 2 vf alăturate $\Rightarrow$ acele simboluri sunt pe o latură, cum sunt 6 laturi $\Rightarrow$ acele simboluri pot fi pe 6 laturi. Dar, pot fi (#, *) sau (*, #) adică au 2 variante de plasare $\Rightarrow 6 \times 2 = 12$ moduri

Să zicem că avem situația



$\Rightarrow$ rămâne perechea $P_2 = \{\%, \partial\}$ care pot fi doar pe 3 laturi (adică, în cazul nostru pe CD, DE, EF) deoarece simbolurile sunt diferite $\Rightarrow 3 \times 2! = 6$ v

Mai avem 2 simboluri £, $ pe 2 locuri rămase $\Rightarrow 2! = 2$ moduri

în total, $12 \times 6 \times 2 = 144$

$E_4) P = \frac{144}{720} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

ALACI / XI / 2026 / P6

Fie $z \in \mathbb{C}$ a.î. $z^2 - iz - 1 = 0$ și $\sum_{k=0}^{2026} z^k = ai + bz$, $a, b \in \mathbb{R}$

Se cere $a+b$

$E_1)$ $z^2 - iz - 1 = 0 \Rightarrow z^2 - iz + i^2 = 0 \mid \cdot (z+i) \neq 0 \Rightarrow$

$(z+i)(z^2 - iz + i^2) = 0 \Rightarrow z^3 + i^3 = 0 \Rightarrow z^3 - i = 0 \Rightarrow \boxed{z^3 = i}$

$\Rightarrow \boxed{z^6 = -1} \Rightarrow \boxed{z^{12} = 1}$

$E_2)$ $S = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{2026} = \dfrac{1(z^{2027} - 1)}{z - 1}$

Dar, $2027 \mid 12$ $\Rightarrow 2027 = 12 \cdot 168 + 11$

$=82$

72

107

96

11

$z^{2027} = (z^{12})^{168} \cdot z^{11}$ $\quad i^{12} = 1$

$= 1 \cdot \dfrac{z^{12}}{z} = \dfrac{1}{z}$

$E_3)$ $S = \dfrac{\frac{1}{z} - 1}{z - 1} = \dfrac{\frac{1-z}{z}}{z-1} = \dfrac{1-z}{z} \cdot \dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{z}$

$E_4)$ $z^2 - iz - 1 = 0 \mid : z \Rightarrow z - i - \dfrac{1}{z} = 0$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{z} = i - z$

Cum $\begin{cases} S = i - z \\ S = ai + bz \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow \boxed{a + b = 0}$

ALACI / XI / 2026 / P7

Un punct de coordonate (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}^*$ își schimbă poziția după regula $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Dacă inițial punctul avea $(x_1, y_1) = (2, 1)$, calculați

$\frac{x_{2026}}{y_{2026}}$

$A = 2I_2 + B$ unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B^2 = O_2 \Rightarrow B^p = O_2, \forall p \geq 2$

$A^n = (2I_2 + B)^n = C_n^0 (2I_2)^{n-0} B^0 + C_n^1 (2I_2)^{n-1} B + O_2$

$\Rightarrow A^n = 1 \cdot 2^n I_2 \cdot I_2 + n \cdot 2^{n-1} I_2 \cdot B$

$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 3 \cdot n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_{2026} \\ y_{2026} \end{pmatrix} = A^{2025} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2025} & 3 \cdot 2025 \cdot 2^{2024} \\ 0 & 2^{2025} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^{2026} + 3 \cdot 2025 \cdot 2^{2024} \\ 2^{2025} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2024}(2^2 + 6075) \\ 2^{2025} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \frac{x_{2026}}{y_{2026}} = \frac{2^{2024} \cdot 6079}{2^{2025}} = \frac{6079}{2}$

ALACI / XI / 2026 / P8

Fie $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{9^k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a}{b}$, să se calc $a+b$

$$a_n = \frac{0}{9^0} + \frac{1}{9^1} + \frac{2}{9^2} + \frac{3}{9^3} + \dots + \frac{n}{9^n}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n = &\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots + \frac{1}{9^n} + \quad (R1)\\ &\frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots + \frac{1}{9^n} + \quad (R2)\\ &\frac{1}{9^3} + \dots + \frac{1}{9^n} \quad (R3)\\ &\dots\dots\\ &\frac{1}{9^n} \quad (Rn) \end{aligned}\right\} \text{ sumă triunghiulară de p.g.}$$

$$R_1 = \frac{\frac{1}{9}\left(\left(\frac{1}{9}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{9} - 1} = \frac{\frac{1}{9}\cdot\left(\left(\frac{1}{9}\right)^n - 1\right)}{-\frac{8}{9}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}$$

$$R_2 = \frac{\frac{1}{9^2}\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{9} - 1} = \frac{\frac{1}{9^2}\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} - 1\right)}{-\frac{8}{9}} = \frac{\frac{1}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)}{8} = \frac{\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}$$

$$R_3 = \frac{\frac{1}{9^3}\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{n-2} - 1\right)}{\frac{1}{9} - 1} = \frac{\frac{1}{9^3}\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{n-2} - 1\right)}{-\frac{8}{9}} = \frac{\frac{1}{9^2}\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-2}\right)}{8} = \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}$$

analog până scriem $R_n = \frac{1}{9^n} = \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots + \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} - n\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8} = \frac{\frac{1\left(\left(\frac{1}{9}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{9} - 1} - n\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\frac{9\left(\left(\frac{1}{9}\right)^n - 1\right)}{-8} - n\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8} \text{ și cum } \left(\frac{1}{9}\right)^n \to 0,\ n\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{n}{9^n} \to 0$$

$$\Rightarrow a_n \to \frac{\frac{-9}{8} - 0}{8} = \frac{9}{64} \Rightarrow a = 9;\ b = 64 \Rightarrow a + b = 73$$

ALACI / XI / 2026 / P3

$f:(-\infty;0)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$

Determinați asimptotele la G_f

---

as. oriz: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+2)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}=0\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=0$ as. oriz spre $-\infty$

as. oblice: $\exists$ as. oriz spre $-\infty \Rightarrow \nexists$ as. oblică spre $-\infty$

as. verticale: $\Delta_f=(-\infty;0)$, calc. în $x=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \nexists$ as. verticale

$y=0$ singura asimptotă (orizontală)

ALAC I / XI / 2026 / P10

$n \in \mathbb{N}^*$, $A_n\left(n, \frac{1}{n}\right), B_n\left(n+1, \frac{1}{n+1}\right), C_n\left(n+2, \frac{1}{n+2}\right)$

și S_n este aria $\triangle A_n B_n C_n$

Se cere $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$

E1) $S_n = \frac{1}{2}|\Delta_n|$ unde $\Delta_n = \begin{vmatrix} n & \frac{1}{n} & 1 \\ n+1 & \frac{1}{n+1} & 1 \\ n+2 & \frac{1}{n+2} & 1 \end{vmatrix}$ =

$\underset{L_3 - L_2 \to L_3}{L_2 - L_1 \to L_2}$ $\begin{vmatrix} n & \frac{1}{n} & 1 \\ 1 & \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} & 0 \\ 1 & \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{n/(n+1)} \\ 1 & -\frac{1}{(n+1)/(n+2)} \end{vmatrix}$

$= -\frac{n/1}{(n+1)/(n+2)} + \frac{n+2/1}{n/(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

E2) $S = \frac{1}{2}|\Delta_n| = \frac{1}{n/(n+1)/(n+2)}$

E3) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n/(n+1)/(n+2)}$

COMPLICAT, dar la E4), $\frac{2}{n/(n+1)/(n+2)} = \frac{1}{n/(n+1)} - \frac{1}{(n+1)/(n+2)}$

$\Rightarrow \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k/(k+1)} - \frac{1}{(k+1)/(k+2)}\right)$

$k=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right)$

$k=2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right)$

$\dots\dots\dots\dots$

$k=n \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n/(n+1)} - \frac{1}{(n+1)/(n+2)}\right)$

$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)/(n+2)}\right) \Rightarrow S \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \Rightarrow S \to \frac{1}{4}$