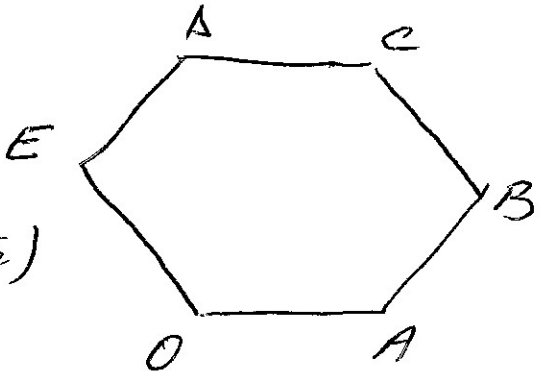
XII/ALAC1/2026/P1

Un robot pornește din O care e vârf al hexagonului regulat OABCDE și se deplasează pe laturi sau pe diagonale și trece prin celelalte vârfuri o dată și se întoarce în O. În câte moduri poate face deplasarea dacă din O nu poate trece direct în C.



E_1) din O $\Rightarrow$ poate A, B, D, E.
$\Rightarrow$ 4 v

E_2) din al doilea vârf rămân tot 4 v (aici ~~D~~ nicio restricție)

E_3) din al treilea vârf $\Rightarrow$ 3 v
din al patrulea $\Rightarrow$ 2 v
din al cincilea $\Rightarrow$ 1 v
ender

$\Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$

ALACI | XII | 2026 | P2

ABCDEF hexagon iar în vârfuri așezăm aleatoriu ∂, #, %, *, £, $ fiecare simbol fiind folosit o singură dată.

Calculați probabilitatea ca simbolurile # și * să fie în 2 vârfuri alăturate iar % și ∂ să fie tot în 2 vârfuri alăturate

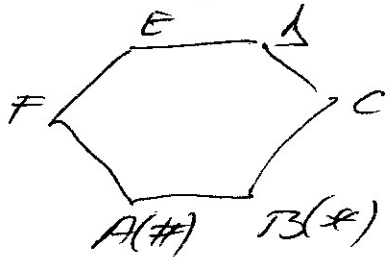
---

E1) $P = \frac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

E2) nr. caz posibile: așezăm 6 simboluri din 6 posibile, contează ordinea $\Rightarrow 6! = 720$ v

E3) nr. caz favorabile: perechea $P_1 = \{\#, *\}$ să fie în 2 vf alăturate $\Rightarrow$ acele simboluri sunt pe o latură, cum sunt 6 laturi $\Rightarrow$ acele simboluri pot fi pe 6 laturi. Dar, pot fi (#, *) sau (*, #) adică au 2 variante de plasare $\Rightarrow 6 \times 2 = 12$ moduri

Să zicem că avem situația



$\Rightarrow$ rămâne perechea $P_2 = \{\%, \partial\}$ care poate fi doar pe 3 laturi (adică, în cazul nostru pe CD, DE, EF) deoarece simbolurile sunt diferite $\Rightarrow 3 \times 2 = 6$ v

Mai avem 2 simboluri £, $ pe 2 locuri rămase $\Rightarrow 2! = 2$ moduri

În total, $12 \times 6 \times 2 = 144$

E4) $P = \frac{144}{720} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

ALAC I / XII / 2026 / P3

Soluția ecuației $(2x)^{\lg 2} = (3x)^{\lg 3}$ este fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$ cu $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Se cere $2b - 3a$

$$(2x)^{\lg 2} = (3x)^{\lg 3} \quad | \ \lg(\cdots)$$

$$\Leftrightarrow \lg 2 \lg(2x) = \lg 3 \lg(3x)$$

$$\Leftrightarrow \lg 2(\lg 2 + \lg x) = \lg 3(\lg 3 + \lg x)$$

$$\Leftrightarrow \lg x(\lg 2 - \lg 3) = \lg^2 3 - \lg^2 2$$

$$\Leftrightarrow \lg x(\lg 2 - \lg 3) = (\lg 3 - \lg 2)(\lg 3 + \lg 2) \ | : (\lg 3 - \lg 2) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lg x = -(\lg 3 + \lg 2)$$

$$\Rightarrow \lg x = -\lg 6 \Rightarrow \lg x = \lg 6^{-1} \Rightarrow x = 6^{-1}$$

$f(x) = \lg x$ injectivă

$\Rightarrow x = \frac{1}{6}$ ireductibilă $\Rightarrow a = 1, b = 6$

$$2b - 3a = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 = 9$$

ALAC1 | XII/2026/P4

$x \in [0, \pi]$ cu $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$

Se cere $\cos^2(2x)$

$E_1)$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \,|()^2 \Rightarrow \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$

$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2}$

$E_2)$ $\underbrace{\sin^2(2x)}_{\frac{1}{2}} + \cos^2(2x) = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \cos^2(2x) = 1 \Rightarrow \cos^2(2x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ALAC1/XII/2026/P5

Un punct de coordonate (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}^*$ își schimbă poziția după regula $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Dacă inițial punctul avea $(x_1, y_1) = (2,1)$, calculați

$\frac{x_{2026}}{y_{2026}}$

$A = 2I_2 + B$ unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B^2 = O_2 \Rightarrow B^p = O_2, \forall p \geq 2$

$A^n = (2I_2 + B)^n = C_n^0 (2I_2)^{n-0} B^0 + C_n^1 (2I_2)^{n-1} B + O_2$

$\Rightarrow A^n = 1 \cdot 2^n I_2 \cdot I_2 + n \cdot 2^{n-1} I_2 \cdot B$

$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 3 \cdot n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_{2026} \\ y_{2026} \end{pmatrix} = A^{2025} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2025} & 3 \cdot 2025 \cdot 2^{2024} \\ 0 & 2^{2025} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^{2026} + 3 \cdot 2025 \cdot 2^{2024} \\ 2^{2025} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2024}(2^2 + 6075) \\ 2^{2025} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \frac{x_{2026}}{y_{2026}} = \frac{2^{2024} \cdot 6079}{2^{2025}} = \frac{6079}{2}$

ALAC I / XII / 2026 / P6

Stabiliți dacă operația de compunere

$$x \circ y = \frac{xy+2x+2y-2}{3}$$

definește o lege de compoziție pe $G=\{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Dacă DA, calculați suma elementelor simetrizabile ale monoidului $(G, \circ)$

$E_1)$ $x \circ y = \frac{1}{3}(x(y+2)+2(y+2)-6) = \frac{1}{3}(x+2)(y+2) - 2$

$E_2)$ $x=3k+1$, $y=3l+1 \Rightarrow x \circ y = \frac{1}{3}(3k+3)(3l+3)-2$

$\Rightarrow x \circ y = 3(k+1)(l+1)-2 = 3(k+1)(l+1)-3+1 =$

$= 3((k+1)(l+1)-1)+1 = 3t+1 \in G$ cu $t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \circ$ lege de compoziție pe G

$E_3)$ $\forall x \in G$, $\exists e \in G$ cu $x \circ e = e \circ x = x$, x arată-o comut.

$x \circ e = x \Rightarrow \frac{1}{3}(x+2)(e+2)-2 = x \Rightarrow \frac{1}{3}(x+2)(e+2) = x+2, \forall x \in G$

$\Rightarrow \frac{1}{3}(e+2) = 1 \Rightarrow e = 1 \in G$

$E_4)$ $\forall x \in G$, cand $x' \in G$ a.î. care $x \circ x' = x' \circ x = e$

$x \circ x' = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}(x+2)(x'+2)-2 = 1 \Rightarrow (x+2)(x'+2) = 9$ cu $x, x' \in G$

Dar, $x, x' \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+2, x'+2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+2 \in D_9$

Dar, $x \in G \Rightarrow x = 3k+1 \Rightarrow x+2 = 3k+3$

$\Rightarrow x+2 \in D_9$ dar $(x+2)$ multiplu de 3 $\Rightarrow x+2 \in \{\pm 3, \pm 9\}$

Analog, $x' \in G \Rightarrow (x'+2)$ multiplu de 3 $\Rightarrow x'+2 \in \{\pm 3, \pm 9\}$

Dacă $x+2 \in \{-9, 9\} \Rightarrow x'+2 \in \{-1, 1\}$ Fals

$\Rightarrow x+2 \in \{\pm 3\} \Rightarrow x \in \{1, -5\}$

$\Rightarrow S = 1+(-5) = -4$

ALAC I | XII | 2026 | P7

$x_{n+1} = \ln|x_n| - x_n^2 + 2x_n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Pentru câte valori ale lui $x_0 \in \mathbb{R}^*$ șirul e constant?

Șir constant $\Rightarrow x_n = x \ \forall n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow x_{n+1} = x$

$\Rightarrow x = \ln|x| - x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \ln|x| - x^2 + x + 3 = 0$

și ne interesează câte valori ale lui x există, deci câte soluții reale nenule are această ecuație

Șirul lui Rolle

$g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \ g(x) = \ln|x| - x^2 + x + 3$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \ln(-x) - x^2 + x + 3, & x < 0 \\ \ln x - x^2 + x + 3, & x > 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{-x} \cdot (-1) - 2x + 1, & x < 0 \\ \frac{1}{x} - 2x + 1, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2x + 1, & x < 0 \\ \frac{1}{x} - 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x^2 + x}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} < -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x\left(\frac{\ln|-x|}{-x} + x - 1 - \frac{3}{x}\right) = -\infty, \ \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty$ ($\frac{\ln|-x|}{-x} \to 0$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) \overset{\ln 0 - 0 + 0 + 3}{=\!=\!=} -\infty, \ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = -\ln 2 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \ln 2 > \frac{9}{4} - \ln e > 0$

$g(1) = \ln 1 - 1 + 2 + 3 = 4 > 0$

Șir Rolle

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		∞
g'		$+$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	↗	$\frac{9}{4} - \ln 2$	↗	$-\infty$ | $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

Șir Rolle $(-;+;-\,|\,-;+;-) \Rightarrow$ 4 rădăcini reale $\Rightarrow$ 4 valori ale x_0

ALACI | XII | 2026 | P8

$A(1,1)$, $B(-1,0)$, $P(a,2)$, $a=?$ dacă $P \in AB$

$P \in AB \Leftrightarrow A, B, P$ coliniare

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0+a-2-0-2+1=0$$

$$\Leftrightarrow a=3$$

ALACI / XII / 2026 / P9

Găsiți numărul de puncte de extrem ale

$f:\left[-\frac{5}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{2}+2\ln(x+3)$

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x+2\cdot\frac{1}{x+3}\cdot 1=x+\frac{2}{x+3}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x+\frac{2}{x+3}=0 \mid\cdot(x+3) \Rightarrow$

$x^2+3x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \in \Delta_f \\ x=-2 \in \Delta_f \end{cases}$

---

x	$\left[-\frac{5}{2}\right.$		-2		-1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Rightarrow$ $x=-\frac{5}{2}$ pct MINIM

$x=-2$ pct MAXIM

$x=-1$ pct MINIM

$\Rightarrow$ 3 pct de extrem

ALAC1 | XII | 2026 | P10

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\sin^n x\,dx$$

Se cere $2025I_{2024}-2026I_{2026}$

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\sin^n x\,dx$$

$f(x)=\sin^{n-1}x \Rightarrow f'(x)=(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x$

$g'(x)=\sin x \Rightarrow g(x)=-\cos x$

$$I_n=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/4}+(n-1)\int_0^{\pi/4}\sin^{n-2}x\cos^2x\,dx$$

$$I_n=-\left(\sin^{n-1}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\sin^{n-1}0\cos 0\right)+(n-1)\int_0^{\pi/4}\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)\,dx$$

$$I_n=-\left(\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\sqrt2}{2}-0\right)+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$$\Rightarrow I_n=-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^n+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^n=(n-1)I_{n-2}-nI_n$$

$$\text{Pt } n=2026 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{2026}=2025I_{2024}-2026I_{2026}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{1013}=\text{rezultatul cerut}$$